Fakultet za proizvodnju i menadžment Trebinje

Matematika I

Prvi kolokvijum

November 17, 2014

Ime i prezime:______________________________ Poeni:

1.	2.	3.	4.	$\sum$

---

1. Dokazati skupovnu jednakost:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

[6 poena]

Rješenje:

p	q	r	$(p \vee g)$	$(p \vee q) \vee r$	$(q \vee r)$	$p \vee (q \vee r)$	$\mathfrak{F}$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

Table 1: Istinitosna tablica

2. Date su f-je $f(x) = \frac{x+1}{5}$ i $g(x) = \frac{3x+2}{-7}$. Ispitati da li su funkcije bijekcije, naći $f^{-1}(x)$ i $f \circ g \circ f^{-1}$.

[6 poena]

Rješenje:

Da bi funkcija f bila injekcija mora biti:

(a) Injekcija - $(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$, odnosno $\frac{x_1+1}{5} = \frac{x_2+1}{5} \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, što znači da je funkcija "$1-1$".

(b) Surjekcija - $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$, odnosno $\frac{x_0+1}{5} = y_0$; $x_0 = 5y_0 - 1$. Provjeravamo da li je $f(x_0) = y_0$, tj. $f(x_0) = \frac{5x_0-1+1}{5} = y_0$. Funkcija $f(x)$ je "na".

Funkcija $f(x)$ je bijekcija.

Za funkciju $g(x)$ dokazujemo analogno.

Inverzna funkcija funkcije $f(x)$ je $f^{-1}(x) = 5x - 1$.

Složena funkcija $f \circ g \circ f^{-1} = \frac{15x-8}{-35}$.

3. Koristeći metod matematičke indukcije dokazati:

(a) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

Rješenje:

Za $n = 1$ važi $1 \cdot 3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 9}{6}$ $\surd$.

Za $n = k$ pretpostavimo da je jednakost tačna $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + k(k+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$.

Ispitujemo da li jednakost vrijedi za $n = k + 1$.

$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + (k+1)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$

$\frac{k(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)(k+3) = \frac{k+1}{6}[k(2k+7) + 6(k+3)] = \frac{k+1}{6}[2k(k+2) + 9(k+2)] = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$.

(b) $9 | 2^{2n} - 3n - 1$, za $n \geq 2$

Za $n = 2$ imamo $9|9$

Za $n = k$ pretpostavljamo $9 | 2^{2k} - 3k - 1$

Za $n = k + 1$ dokazujemo:

$9 | 2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1$

$9 | 4 \cdot 2^{2k} - 3k - 4$

$9 | 4 \cdot 2^{2k} - 12k - 4 - 9k$

$9 | 4 \cdot \underbrace{(2^{2k} - 3k - 1)}_{\text{po pretpostavci djeljivo sa k}} \quad -9k$

[6 poena]

4. Riješiti binomnu jednačinu: $z^6 + 64 = 0$.

Rješenje:

$z = \sqrt[6]{-64}, \rho = 64, \phi = \pi$.

$z = \sqrt[6]{64} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{6} \right), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$z_1 = \sqrt{3} + i$,

$z_2 = 2i$,

$z_3 = -\sqrt{3} + i$,

$z_4 = -\sqrt{3} - i$,

$z_5 = -2i$,

$z_6 = \sqrt{3} - i$.

[6 poena]

5. Naći $A^n, n \in N$ ako je $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Pokazati da važi $A^2 - 2A + I = O$. [6 poena]

Rješenje:

Intuitivno dolazimo do $A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n \\ -2n & -(2n-1) \end{pmatrix}$, što trebamo dokazati matematičkom indukcjom, a zatim provjeriti jednakost iz zadatka.

Napomena: Rješenja zadataka obrazložiti. Ovaj papir obavezno potpisati i predati sa rješenjima.
Vrijeme za rad: 90 minuta.