Fakultet za proizvodnju i menadžment Trebinje

Matematika III

Prvi kolokvijum

24. 11. 2014. god.

Ime i prezime:____________________________ Poeni:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$

---

1. Naći oblast definisanosti funkcije:

a) $z(x,y) = \ln(1-x-y) + \arcsin\frac{x}{2}$,

b) $z(x,y) = \sqrt{y \cdot \sin x}$,

c) $z(x,y) = \frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{x^2+y^2-x}} + \frac{1}{y^2}$.

Rješenje:

a) $Df = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y < 1 \wedge x \geq -2 \wedge x \leq 2\big\}$

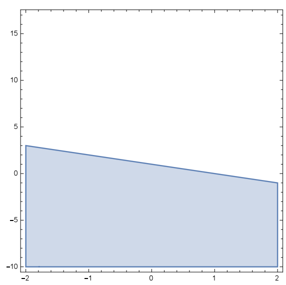

Figure 1: Oblast definisanosti a)

b) $Df = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (y \geq 0 \wedge 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi) \vee (y \leq 0 \wedge 2k\pi + \pi \leq x 2k\pi)\big\}$

c) $Df = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0 \wedge (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{4}.\big\}$

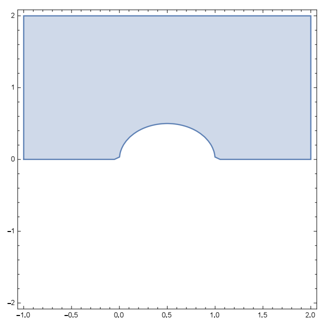

Figure 2: Oblast definisanosti c)

2. Da li postoje sljedeće granične vrijednosti:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-3y}{x-5y}$,

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

(Rješenje:)

a) Ne postoji ($L_1 \neq L_2$).

b) Ne postoji (zavisi od k).

3. **a)** Naći parcijalne izvode prvog reda funkcije $z = e^{\sin(x/y)}$ i $z = \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})$.

b) Konstruisati Tajlorov polinom prvog reda za funkciju

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

u okolini tačke $A(1, 1)$.

(Rješenje:)

a)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\sin \frac{x}{y}} \cdot \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\sin \frac{x}{y}} \cdot \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{-1}{y^2}.$$

b) $T_1 = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 1)$.

4. Odrediti lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y + z.$$

(Rješenje:)

Parcijalni izvodi prvog reda su:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + 1$$

Imamo jednu stacionarnu tačku $S(-1, 1, 1)$.

Determinanta Heseove matrice je:

$$detH = \begin{bmatrix} 1 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\triangle_1(S) = 1 > 0$, $\triangle_2(S) = -1 < 0$ i $\triangle_3(S) = -3 < 0$ to funkcija nema ekstrema.

5. **a)** Izračunati površinu P oblasti ograničene sa pravom $y = x$ i parabolom $y = \frac{x^2}{2}$.

b) Naći površinu lika koji ograničava elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(Rješenje:)

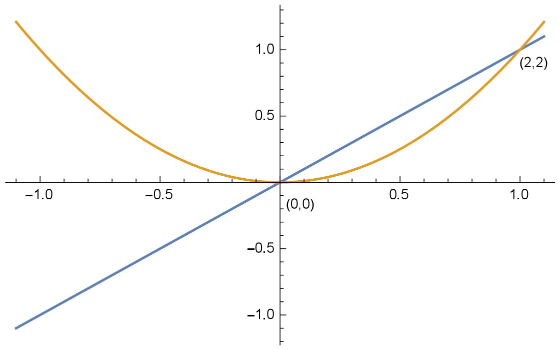

Figure 3: Površina P

a) $P = \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} dy = \cdots = \frac{2}{3}$.

b) Uvedemo polarne koordinate $x = a\rho\cos\varphi$ i $y = b\rho\sin\varphi$. Jakobijan preslikavanja je $|J| = ab\rho$.
Površina je sada $P = 4P_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 ab\rho d\rho = \cdots = ab\pi$.

Napomena: Rješenja zadataka obrazložiti. Ovaj papir obavezno potpisati i predati sa rješenjima.
Vrijeme za rad: 90 minuta.