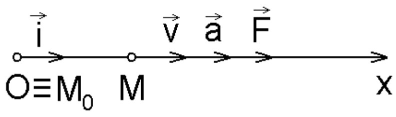
УНИВЕРЗИТЕТ У ИСТОЧНОМ САРАЈЕВУ
ФАКУЛТЕТ ЗА ПРОИЗВОДЊУ И МЕНАЏМЕНТ ТРЕБИЊЕ
Предмет: Механика II (Кинематика)

ПРИМЈЕРИ РИЈЕШЕНИХ ЗАДАТАКА ИЗ ДИНАМИКЕ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

Требиње, јануар 2015. године

1. Тачка, масе m = 4 kg, почиње кретање из мира под дејством силе чији се интензитет мијења по закону $F(t) = 2(t^2 + 3t)$, (t у s, F у N). Сматрајаући да сила не мијења правац и смјер, одредити коначну једначину кретања тачке. Наћи брзину и убрзање тачке у тренутку t_1= 1 s, као и пут који тачка пређе за то вријеме.



Рјешење:

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

$$m\ddot{x} = F(t),$$

$$m\ddot{x} = 2\left(t^2 + 3t\right),$$

$$4\ddot{x} = 2\left(t^2 + 3t\right),$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\left(t^2 + 3t\right),$$

$$a_1 = \ddot{x}\left(t = t_1\right) = \frac{1}{2}\left(t_1^2 + 3t_1\right) = \frac{1}{2}\left(1^2 + 3 \cdot 1\right) = 2\, m/s^2,$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\int\left(t^2 + 3t\right)dt + C_1,$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} + 3 \cdot \frac{t^2}{2}\right) + C_1,$$

$$t_0 = 0,\ \dot{x}\left(t = t_0\right) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} + 3 \cdot \frac{t^2}{2}\right),$$

$$v_1 = \dot{x}\left(t = t_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t_1^3}{3} + 3 \cdot \frac{t_1^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1^3}{3} + 3 \cdot \frac{1^2}{2}\right) = \frac{11}{12}\, m/s,$$

$$x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{t^3}{3} + 3 \cdot \frac{t^2}{2}\right)dt + C_2,$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{2}\right) + C_2,$$

$$t_0 = 0,\ x\left(t = t_0\right) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

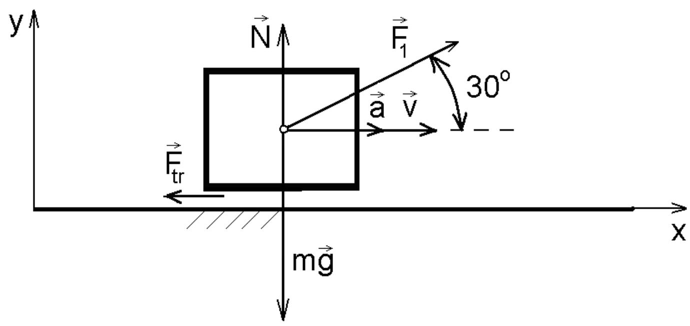
$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{2}\right),$$

$$x_1 = x\left(t = t_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t_1^4}{12} + \frac{t_1^3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1^4}{12} + \frac{1^3}{2}\right) = \frac{7}{24}\, m.$$

2. Сандук (материјална тачка), масе m, креће се по храпавој хоризонталној подлози под дејством константне силе интензитета $F_1 = mg$, чија нападна линија заклапа угао од 30^o са хоризонталом. Коефицијент трења је $\mu = \frac{1}{3}$.

Одредити:

а) убрзање сандука;
б) брзину сандука након 5 секунди од почетка кретања и пут који пређе за то вријеме, ако је почетна брзина била једнака нули.



Рјешење:

а)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{tr},$$

$$x: m\ddot{x} = F_1 \cdot \cos\alpha - F_{tr},\ F_{tr} = \mu N\ \left(\ddot{x} = a\right),$$

$$y: 0 = -mg + F_1 \cdot \sin\alpha + N,$$
$$N = mg - F_1 \cdot \sin\alpha,$$
$$N = mg - F_1 \cdot \sin 30^o,$$
$$N = mg - F_1 \cdot \frac{1}{2},$$
$$N = mg - mg \cdot \frac{1}{2},$$
$$N = \frac{mg}{2},$$

$$m\ddot{x} = F_1 \cdot \cos\alpha - \mu N,$$
$$m\ddot{x} = F_1 \cdot \cos 30^o - \mu N,$$
$$m\ddot{x} = mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{mg}{2},$$
$$m\ddot{x} = \frac{mg}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right),$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right),$$

$$\ddot{x} = \frac{9,81}{2} \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right),$$

$$\ddot{x} = a,$$

$$a = 6,86 \quad m/s^2 .$$

б)

$$v_1 = v_0 + at_1,$$

$$v_0 = 0, \; t_1 = 5 \; s,$$

$$v_1 = 0 + 6,86 \cdot 5,$$

$$v_1 = 34,3 \; m/s,$$

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2},$$

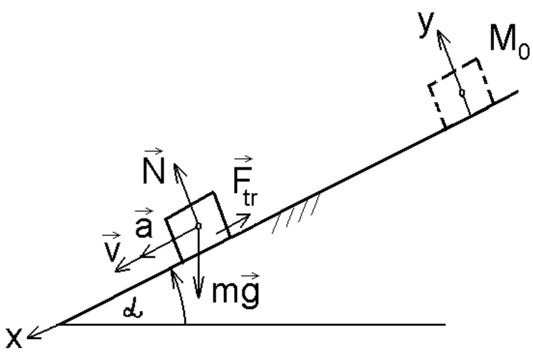
$$x_0 = 0,$$

$$x_1 = 0 + 0 \cdot 5 + \frac{6,86 \cdot 5^2}{2},$$

$$x_1 = 85,75 \; m.$$

3. Сандук (материјална тачка), масе m = 20 kg, креће се низ стрму раван нагиба $\alpha = 30^o$, почевши кретање из положаја M_0 без почетне брзине. Ако је коефицијент трења између сандука и стрме равни $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$, одредити:

а) убрзање сандука и нормалну реакцију стрме равни,
б) брзину сандука након што он пређе пут дужине 10 m.



Рјешење:

а)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{tr} + \vec{N},$$

$$x : m\ddot{x} = mg \cdot \sin\alpha - F_{tr},\; F_{tr} = \mu N \;\left(\ddot{x} = a\right),$$

$$y : 0 = -mg \cdot \cos\alpha + N,$$
$$N = mg \cdot \cos\alpha,$$

$$m\ddot{x} = mg \cdot \sin\alpha - \mu N,$$
$$m\ddot{x} = mg \cdot \sin\alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha,$$
$$m\ddot{x} = mg\left(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha\right),$$
$$\ddot{x} = g\left(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha\right),$$
$$\ddot{x} = g\left(\sin 30^o - \mu \cdot \cos 30^o\right),$$
$$\ddot{x} = 9{,}81 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$\ddot{x} = a,$$
$$a = 2{,}45 \;\; m/s^2,$$

$$N = mg \cdot \cos\alpha,$$
$$N = mg \cdot \cos 30^o$$
$$N = 20 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$N = 169{,}9 \;\; N.$$

б)

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx},$$

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = 2{,}45,$$

$$\dot{x}d\dot{x} = 2{,}45dx,$$

$$\int_0^{\dot{x}_1} \dot{x}d\dot{x} = \int_0^{x_1} dx,$$

$$x_1 = 10 \ \ m,$$

$$\int_0^{\dot{x}_1} \dot{x}d\dot{x} = \int_0^{10} dx,$$

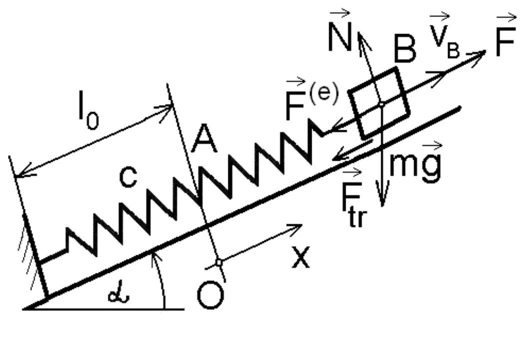
$$\frac{\dot{x}_1^2}{2} = 2{,}45 \cdot 10,$$

$$\dot{x}_1^2 = 49,$$

$$\dot{x}_1 = v_1,$$

$$v_1 = 7 \ \ m/s.$$

4. Терет, масе m = 20 kg, везан за опругу крутости c = 500 N/m чија је дужина у недеформисаном положају l_0= 0,5 m, вуче се константном силом интензитета F = 500 N по храпавој стрмој равни нагиба α = 30^o. Ако је коефицијент трења, између терета и стрме равни, μ = 0,25 и ако је терет у положају А мировао, одредити његову брзину након пређених 0,5 m.



Рјешење:

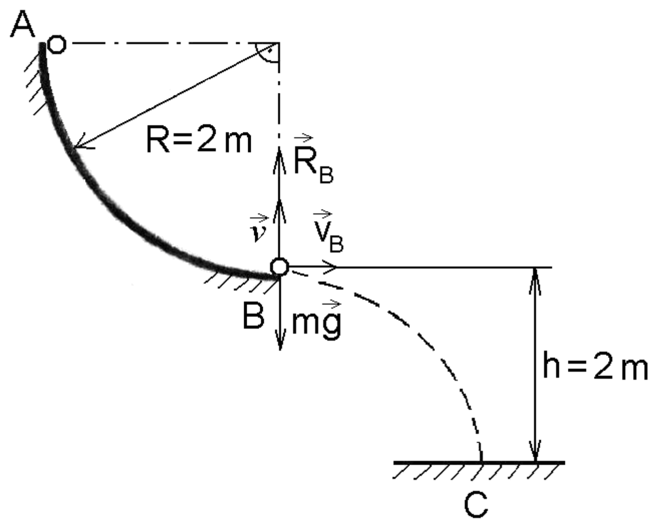
$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}^{(e)} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{tr},$$
$$0 = N - mg \cdot \cos\alpha,$$
$$N = mg \cdot \cos\alpha,$$
$$F_{tr} = \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha,$$

$$E_{KB} - E_{KA} = A_{(A,B)}\left(\vec{F}\right) + A_{(A,B)}\left(\vec{F}^{(e)}\right) + A_{(A,B)}\left(m\vec{g}\right) + A_{(A,B)}\left(\vec{F}_{tr}\right),$$

$$E_{KB} = \frac{m \cdot v_B^2}{2},$$
$$E_{KA} = \frac{m \cdot v_A^2}{2} = 0,$$
$$A_{(A,B)}\left(\vec{F}\right) = F \cdot \overline{AB} = 500 \cdot 0{,}5 = 250 \ \ J,$$
$$A_{(A,B)}\left(\vec{F}^{(e)}\right) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left(x_A^2 + x_B^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot \left(0^2 - 0{,}5^2\right) = -62{,}5 \ \ J,$$
$$A_{(A,B)}\left(m\vec{g}\right) = -mg \cdot \overline{AB} \cdot \sin\alpha = -20 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1}{2} = -49{,}05 \ \ J,$$
$$A_{(A,B)}\left(\vec{F}_{tr}\right) = -\mu \cdot mg \cdot \cos\alpha \cdot \overline{AB} = -0{,}25 \cdot 20 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}5 = -21{,}24 \ \ J,$$

$$\frac{20 \cdot v_B^2}{2} - 0 = 250 - 62{,}5 - 49{,}05 - 21{,}24,$$
$$10 \cdot v_B^2 = 117{,}21,$$
$$v_B^2 = \frac{117{,}21}{10} = 11{,}72,$$
$$v_B = \sqrt{11{,}72} = 3{,}42 \ \ m/s.$$

5. Куглица, масе m = 9 kg, креће се у вертикалној равни по глаткој стази у облику кружног лука, која се завршава у тачци B на висини h = 2 m изнад земљине површине. Куглица је пуштена из положаја A без почетне брзине. Одредити брзину куглице и реакцију везе у положају B, као и брзину којом удара о површину земље. Отпор ваздуха занемарити.



Рјешење:

$$E_{KB}-E_{KA}=A_{(A,B)}(m\vec{g}),$$

$$E_{KB}=\frac{m\cdot v_B^2}{2},$$

$$E_{KA}=\frac{m\cdot v_A^2}{2}=0,$$

$$A_{(A,B)}(m\vec{g})=mg\cdot R,$$

$$\frac{m\cdot v_B^2}{2}=mg\cdot R,$$

$$v_B^2=2gR,$$

$$v_B=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 2}=6{,}26\ \ m/s,$$

$$m\vec{a}_B=m\vec{g}+\vec{R}_B,$$

$$m\cdot a_{B\nu}=-mg+R_B,$$

$$a_{B\nu}=\frac{v_B^2}{R},$$

$$m\cdot\frac{v_B^2}{R}=-mg+R_B,$$

$$R_B=m\cdot\frac{v_B^2}{R}+mg=m\cdot\frac{2gR}{R}+mg=3mg=264{,}87\ \ N,$$

$$E_{KC} - E_{KA} = A_{(A,C)}(m\vec{g}),$$

$$E_{KC} = \frac{m \cdot v_C^2}{2},$$

$$E_{KA} = \frac{m \cdot v_A^2}{2} = 0,$$

$$A_{(A,C)}(m\vec{g}) = mg \cdot (R + h),$$

$$\frac{m \cdot v_C^2}{2} = mg \cdot (R + h),$$

$$v_C^2 = 2g \cdot (R + h),$$

$$v_C = \sqrt{2g \cdot (R + h)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot (2 + 2)} = 8{,}86 \;\; m/s.$$