Fakultet za proizvodnju i menadžment Trebinje

Matematika I

Drugi kolokvijum

January 13, 2015

Ime i prezime:______________________________ Poeni:

1.	2.	3.	4.	$\sum$

---

1. Diskutovati rješenja sistema jednačina za razne vrijednosti realnog parametra λ.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 3z &= 12 \\ 4x + 2y + 4z &= 10 \\ \lambda x + 2y + z &= 4. \end{aligned}$$

Rješenje:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ \lambda & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2(\lambda - 1)$$

$$D_x = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -24$$

$$D_y = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 3 \\ 4 & 10 & 4 \\ \lambda & 4 & 1 \end{bmatrix} = 18(\lambda - 1)$$

$$D_z = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 4 & 2 & 10 \\ \lambda & 2 & 4 \end{bmatrix} = -4(\lambda - 7)$$

1. Za $\lambda \neq 1$, $D \neq 0$, sistem ima jedinstveno rješenje:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-12}{\lambda - 1}, y = \frac{D_y}{D} = 9, z = \frac{D_z}{D} = \frac{-2(\lambda - 7)}{\lambda - 1}.$$

2. Za $\lambda = 0$, $D = 0, D_x \neq 0, D_z \neq 0$ sistem nema rješenja.

2. Odrediti matricu X ako je

$$AX = X + B, \text{gdje je}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 4 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$X = (A - I)^{-1}B$

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$det(A - I) = 6 \neq 0$

$$(A - I)^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$adj(A - I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{det(A - I)} \cdot adj(A - I).$$

$$X = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 4 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Napisati jednačinu ravni koja sadrži presječnu pravu ravni $\alpha : 2x+y-3z+5 = 0$ i $\beta : 3x-2y-4z+7 = 0$ i sadrži tačku $M_0(1, -2, 3)$.

Rješenje:

$\alpha + \lambda\beta = 0$

$2x + y - 3z + 5 + \lambda(3x - 2y - 4z + 7) = 0$

$(2 + 3\lambda)x + (1 - 2\lambda)y + (-3 - 4\lambda)z + 5 - 7\lambda = 0$

$M_0(1, -2, 3)$

$\lambda = 2$

$8x - 3y - 11z + 19 = 0$ jednačina tražene ravni.

4. Neka je tačka Q simetrična tački $P(1, 3, 1)$ u odnosu na pravu

$$p : \frac{x - 2}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{y}{-1}.$$

Naći udaljenost tačke P od ravni $x + y + z + 1 = 0$.

Rješenje:

Vektor pravca prave $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{y}{-1}$ je $\overrightarrow{p}(1, 2, -1)$. Označimo li sa λ ravan koja sadrži tačku P i koja je normalna na vektor pravca $\overrightarrow{p}$, zaključujemo da je vektor normale ravni λ jednak vektoru pravca prave, tj. $N_\lambda(1, 2, -1)$, pa je jednačina ravni $\lambda : x + 2y - z - 6 = 0$.

$\frac{x-2}{1} = t \Rightarrow x - 2 = t \Rightarrow x = t + 2,$

$\frac{y+1}{2} = t \Rightarrow y + 1 = 2t \Rightarrow y = 2t - 1,$

$\frac{z}{-1} = t \Rightarrow z = -t.$

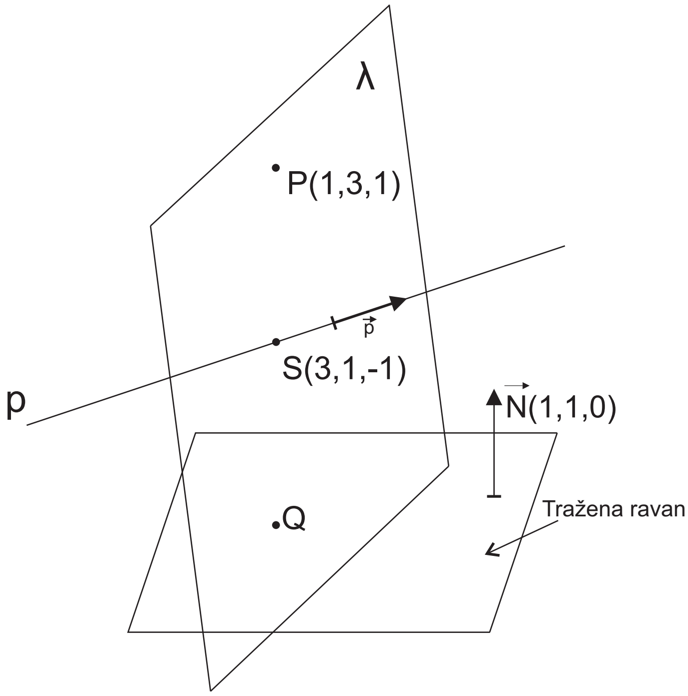
$(t + 2) + 2(2t - 1) - (-t) - 6 = 0,\ t = 1,$

$x = t + 2 \Rightarrow x = 3,$

$y = 1, z = -1.$ Koordinate tačke S su $S(3, 1, -1)$.

$$x_S = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow x_Q = 2x_S - x_P = 6 - 1 = 5;$$

$$y_Q = 2y_S - y_P = -1,\ z_Q = 2z_S - z_P = -3.$$



Koordinate tačke Q su $Q(5,-1,-3)$.

Tražena jednačina ravni sadrži tačku Q i vektor normale $N(1,1,0)$, pa je jednačina $x+y-4=0$.

Napomena: Rješenja zadataka obrazložiti. Ovaj papir obavezno potpisati i predati sa rješenjima.
Vrijeme za rad: 90 minuta.