

Matematika II

Priprema za prvi kolokvijum

April 17, 2015

1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$.

Rješenje:

(a) Domen funkcije je: $Df : x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

(b) Nule funkcije: $\frac{x^2-1}{x^2-4} \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$.

(c) Znak funkcije:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$x-1$	-	-	-	+	+
$x+1$	-	-	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	+
$x+2$	-	+	+	+	+
y	+	-	+	-	+

(d) Parnost funkcije: $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2-4} = \frac{x^2-1}{x^2-4} = f(x)$.

Funkcija $f(x)$ je parna.

(e) **V.A.** $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2-1}{x^2-4} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-1}{x^2-4} = -\infty$.

Prave $x = -2, x = 2$ su vertikalne asimtote.

H.A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = 1$.

Prava $y = 1$ je horizontalna asimtota kad $x \rightarrow \pm\infty$.

K.A. Funkcija nema kosu asimtotu.

(f) Intervali monotonosti i ekstremene vrijednosti funkcije

$$y' = \frac{-6x}{(x^2-4)^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$-x$	+	+	-	-
y'	+	+	-	-
y	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

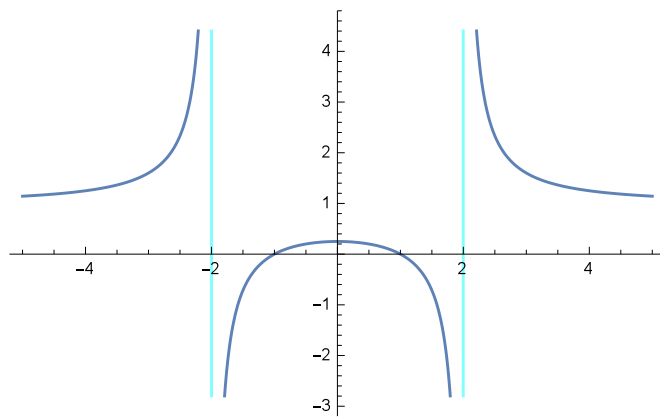
Za $x = 0$ funkcija ima MAX. $y_{max} = y(0) = \frac{1}{4}$.

(g) Konkavnost, konveksnost i prevojne tačke

$$y'' = \frac{6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}, \quad 3x^2 + 4 > 0 \forall x \in Df \Rightarrow \text{funkcija nema PT.}$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$(x^2-4)^3$	+	-	+
y''	+	-	+
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

(h) Grafik funkcije:



Slika 1: Grafik funkcije $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

2. Za vježbu ispitati tok i nacrtati grafik sledećih funkcija:

(a) $y = \frac{x^2+3x}{x+4}$;

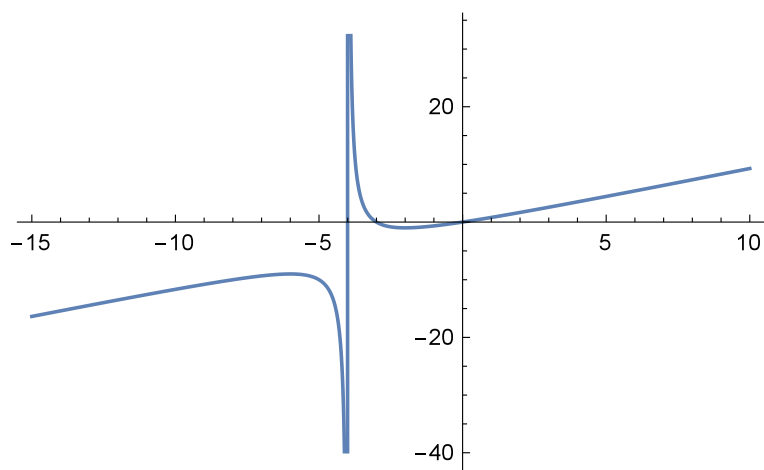
(b) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;

(c) $y = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$;

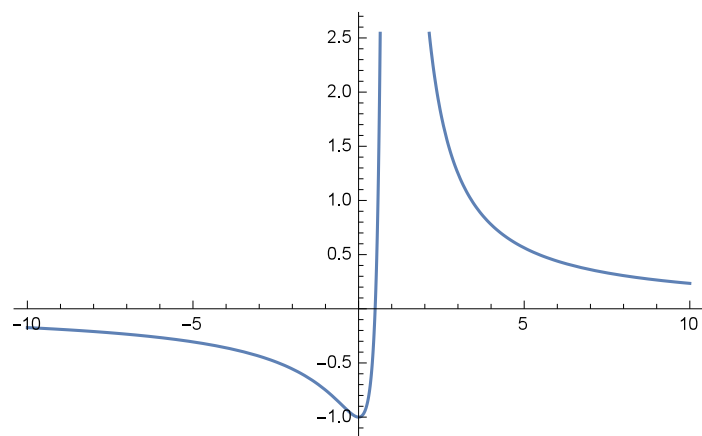
(d) $y = \frac{1}{3}xe^{\frac{5x-2}{x^2}}$;

(e) $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

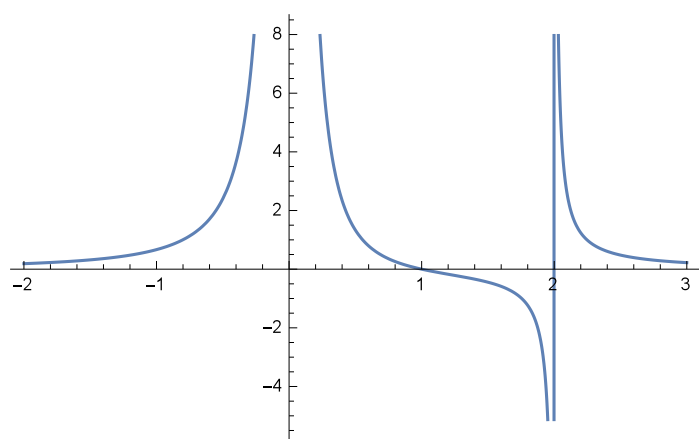
Grafici funkcija:



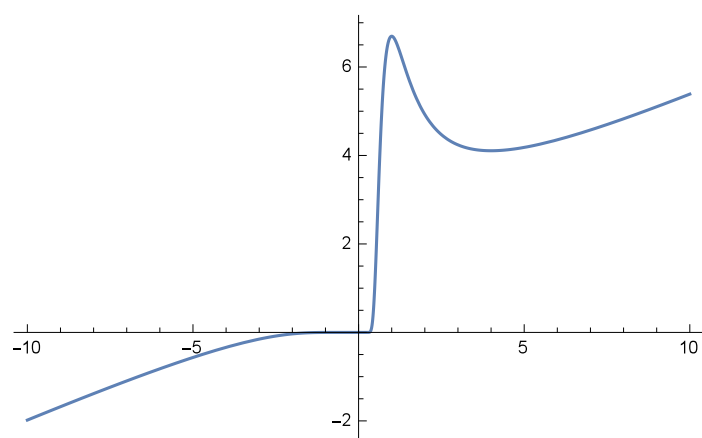
Slika 2: Grafik funkcije pod a)



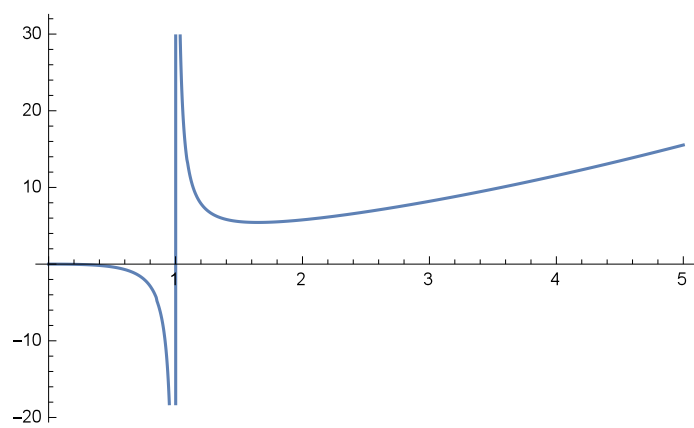
Slika 3: Grafik funkcije pod b)



Slika 4: Grafik funkcije pod c)



Slika 5: Grafik funkcije pod d)



Slika 6: Grafik funkcije pod e)