Fakultet za proizvodnju i menadžment Trebinje

Matematika I

Prvi kolokvijum - Rješenja

1.2. 2016. god.

Ime i prezime, broj indeksa:____________________ Poeni:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$

---

1. Diskutovati rješenja sistema jednačina za razne vrijednosti realnog parametra:

$$\begin{aligned} \lambda x + 2y + z &= 4 \\ 2x + y + 2z &= 5 \\ 3x + 2y + 3z &= 12 \end{aligned}$$

Rješenje:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 - \lambda$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 12 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 9(9 - \lambda)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 2(\lambda - 7)$$

Za $\lambda \neq 1 \Rightarrow D \neq 0$ sistem ima jednistveno rješenje $x = -\frac{12}{\lambda-1}$, $y = 9$, $z = -\frac{2(\lambda-7)}{\lambda-1}$.
Za $\lambda = 1 \Rightarrow D = 0, D_x = 12 \neq 0$ pa sistem nema rješenja.

2. Tačke $A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,2)$ i $D(5,4,3)$ su tjemena tetraedra. Izračunati zapreminu tetraedra i vektor visine koji odgovara strani ABC.

Rješenje:

Prvo odredimo vektore: $\overrightarrow{AB} = (-1,2,0), \overrightarrow{AC} = (-1,0,2), \overrightarrow{AD} = (4,3,4)$, a zatim odredimo zapreminu paralelopipeda konstrisanog nad tim vektorima, tj. računamo mješoviti proizvod:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 30.$$

Zapremina tetraedra je sada: $V = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5$.

Dalje računamo površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, dakle prvo računamo vektorski proizvod:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}.$$

Površina je sada jednaka $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{6}$. Jedinični vektor vektora $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ je $\overrightarrow{h_0} = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$. Površina trougla ABC je sada $P_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}$. Iz obrasca $V = \frac{B \cdot H}{3}$, gdje je $B = P_{ABC}$ nalazimo dužinu visine $H = \frac{15}{\sqrt{6}}$, odnosno intezitet $|\overrightarrow{H}|$.

Vektor visine je sada $\overrightarrow{H} = |\overrightarrow{H}| \cdot \overrightarrow{h_0} = (5, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

3. Ispitati da li se prave $p : \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$ i $g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ sijeku, a zatim naći presječnu tačku i ugao između njih.

Rješenje: Uslov da se dvije prave p_1 i p_2 sijeku je $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$. U našem primjeru to izgleda ovako $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, što znači da se prave sijeku.

Da bi našli presječnu tačku pravih p i q prvo ćemo napisaćemo pravu p u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} x &= t + 3 \\ y &= 2t + 1 \\ z &= t - 2 \end{aligned}$$

Parametar t određujemo tako što zamjenimo x, y, z u jednačini prave q:

$$\frac{t + 3 - 1}{2} = \frac{2t + 1 - 2}{1} \Rightarrow t = \frac{4}{3}.$$

Vraćajući se u parametarske jednačine prave p dobijamo koordinate tačke presjeka: $P = (\frac{13}{2}, \frac{11}{3}, \frac{-2}{3})$.
Ugao između pravih p i q određujemo pomoću obrasca za skalarni proizvod dva vektora:

$$\cos\angle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = \frac{|\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}|}{|\overrightarrow{p}| \cdot |\overrightarrow{q}|},$$

gdje su $\overrightarrow{p} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{q} = (2, 1, -1)$.
Na kraju dobijamo da je $\cos\angle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = \frac{\pi}{6}$.

4. Kroz presjek ravni $\alpha : 4x - y + 3z - 1 = 0$ i $\beta : x + 5y - z + 2 = 0$ postaviti ravan γ koja je normalna na ravan $\delta : 3x - y + 5z - 3 = 0$. Naći jednačinu ravni γ.

Rješenje: Koristimo jednačinu pramena ravni:

$$\begin{aligned} \alpha + \lambda\beta &= 0 \\ 4x - y + 3z - 1 + \lambda(x + 5y - z + 2) &= 0 \\ x(4 + \lambda) + y(5\lambda - 1) + z(3 - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Iz uslova zadatka da tražena ravan zaklapa ugao od 90° sa ravni δ slijedi: $\overrightarrow{N_\lambda} = (4+\lambda, 5\lambda-1, 3-\lambda)$, $\overrightarrow{N_\delta} = (3, -1, 5)$, $\overrightarrow{N_\lambda} \perp \overrightarrow{N_\delta} \Rightarrow \overrightarrow{N_\lambda} \cdot \overrightarrow{N_\delta} = 0$

$$
\begin{aligned}
3(4+\lambda) - (5\lambda - 1) + 5(3-\lambda) &= 0 \\
\lambda &= 4 \\
\gamma : 8x + 19y - z + 7 &= 0
\end{aligned}
$$

5. Napisati jednačinu ravni α koja sadrži tačku $M_1(4,0,-2)$ i normalna je na pravu $p : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{2}$. Naći prodor prave kroz dobijenu ravan.

Rješenje:

Vektor normale tražene ravni jednak je vektoru pravca prave p, odnosno $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{N} = (1,-3,2)$. Slijedi da je jednačina ravni:

$$
\begin{aligned}
\alpha : (x-4) - 3y + 2(z+2) &= 0 \\
\alpha : x - 3y + 2z &= 0.
\end{aligned}
$$

Da bismo našli prodor prave p kroz ravan α, napišimo parametarske jednačine prave:

$$
\begin{aligned}
x &= -2 + t \\
y &= 1 - 3t \\
z &= -1 + 2t.
\end{aligned}
$$

Zamjenom x, y, z u jednačini ravni dobijamo da je $t = \frac{1}{2}$. Vraćajući se u parametarske jednačine prave dobijamo koordinate tačke prodora $P(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$.

Napomena: Rješenja zadataka obrazložiti. Ovaj papir obavezno potpisati i predati sa rješenjima.
Vrijeme za rad: 90 minuta.