Matematika II

Drugi kolokvijum M

15. 06. 2016. god.

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	$\sum$

Ime i prezime, broj indeksa:____________________ Poeni:

---

1. (a) Metodom smjene izračunati sljedeći integral: $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{1+x}dx$;

[2 poena]

Rješenje:

$\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{1+x}dx = \left[\begin{array}{c} \text{Uvodimo smjenu: } arctg\sqrt{x} = t, \text{ pa računajući izvode dobijamo:} \\ \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt \end{array}\right]$

$= 2\int tdt = \frac{2t^2}{2} = (arctg\sqrt{x})^2 + C.$

(b) Metodom parcijalne integracije izračunati: $\int(\arcsin x)^2 dx$.

Rješenje:

$\int(\arcsin x)^2 dx = \left[\begin{array}{c} u = (\arcsin x)^2 \\ du = 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = x \end{array}\right] = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x dx =$

$= \left[\begin{array}{c} u = \arcsin x \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ smjenom } 1-x^2 = t; \text{ dobijamo } v = -\sqrt{1-x^2} \end{array}\right] =$

$= x\arcsin^2 x - 2\left[-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x + \int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right] = x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x -$ $2x + C.$

[2 poena]

2. Riješiti sljedeći integral racionalne funkcije:

$$\int \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Rješenje:

Uzimajući u obzir nule imenioca, podintegralnu funkciju možemo napisati u obliku:

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Nepoznate koeficijente određujemo iz jednakosti: $x^2+3x+3 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$.

Odavde je $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{5}{2}$.

$$\text{Dakle} \int \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{5}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx =$$

$$\left[\ \text{Uvodimo smjenu } x^2+1=t\ \right] = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{5}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x+1|\sqrt{x^2+1}) + \frac{5}{2}\arctan x + C.$$

[6 poena]

3. (a) Izračunati sljedeći integral trigonometrijske funkcije:

$$\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x};$$

[4 poena]

Rješenja:
Uvodimo univerzalnu trigonometrijsku smjenu: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Računamo dalje: $x=2\arctan t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.
Vraćajući se u integral dobijemo:

$$\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{dx}{1+t^2}}{3-2\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{2t^2-4t+4} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Ovo je integral oblika} \\ \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, D<0 \\ \text{U imeniocu formiramo potpun kvadrat} \\ \text{da bismo integral sveli na tablični} \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{dt}{(t-1)^2+1} = \arctan(t-1) + C = \arctan\left(\tan\frac{x}{2}-1\right) + C.$$

(b) Izračunati integral iracionalne funkcije:

$$\int \sqrt{16-x^2}dx.$$

[4 poena]

Rješenje:
Integral rješavamo smjenom $x=4\sin t \Rightarrow sint=\frac{x}{4}, dx=4\cos tdt$.

$$\int \sqrt{16-x^2}dx =^{smjenom} 4\int \sqrt{16-16\sin^2 t}\cdot\cos tdt = 16\int \cos^2 tdt = 16\int \frac{1-cos2t}{2}dt =$$

$$= 8\int(1+\cos 2t)dt = 8(t+\frac{1}{2}\sin 2t) + C = 8(\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}) + C.$$

4. Izračunati površinu figure koju ograničavaju kriva $y=\operatorname{tg} x$, prave $x=\frac{-\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$ i $y=0$.

[6 poena]

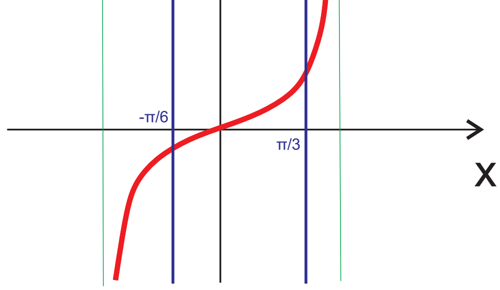

Figure 1: Slika uz zadatak 4

Prema slici zaključujemo sljedeće:

$$P = P_1 + P_2 = -\int_{-\pi/6}^{0} \operatorname{tg} x dx + \int_{0}^{\pi/3} \operatorname{tg} x dx.$$

Računaćemo samo P_1, jer se P_2 računa analogno.

$$P_1 = -\int_{-\pi/6}^{0} \operatorname{tg} x dx = -\int_{-\pi/6}^{0} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \text{smjena } {}^{\cos x = t} = -\ln|\cos x||_{-pi/6}^{0} = -\ln|\cos\frac{\pi}{6}| = -\ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Naći opšti integral sljedeće jednačine:

$$y'' + y' - 2y = (x^2 - 1)e^{2x}.$$

[6 poena]

Rješenje:

Rješenja karakteristične jednačine $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ su $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ pa je homogeno rješenje:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Kako je $\alpha = 2, \beta = 0$, zaključujemo da $\alpha + \beta i = 2$ nije rješenje karakteristične jednačine, a polinom $P(x) = x^2 - 1$ je drugog stepena, to partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$. Diferenciranjem i uvrštavanjem u jednačinu dalje dobijamo:

$$y_p^{'} = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{2x}(2Ax + B)$$

$$y_p^{''} = e^{2x}\left[4Ax^2 + (4B + 8A)x + (4C + 4B + 2A)\right]$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobijamo da je $A = \frac{1}{4}, B = \frac{-5}{8}, C = \frac{13}{32}$ pa je partikularno rješenje

$$y_p = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{13}{32}\right)e^{2x}.$$

Saberemo $y = y_h + y_p$.