MATLAB

Simbolički račun

Šta je simbolički račun?

- Simbolički račun ili algebarski račun je naučna oblast koja se bavi proučavanjem i razvojem algoritama i softvera za manipulisanje matematičkim izrazima.
- Za razliku od numeričkog računa, u kome figurišu konkretne numeričke vrednosti promenljivih, u simboličkom računu se manipuliše izrazima u kojima se promenljive tretiraju kao simboli bez konkretne vrednosti.
- Simbolički račun odgovara rešavanju izraza „na papiru“, npr. $(a+b)^2 - 3b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 3b^2 = a^2 + 2ab - 2b^2$.
- Prednost simboličkog računa u odnosu na numerički je da se dobija tačna vrednost izraza, dok je numerički podložan greškama zaokruživanja usled ograničenja broja decimalnih mesta kod decimalnih brojeva.

Simbolički račun u MATLAB-u

- U MATLAB-u, simbolički račun obezbeđuje Symbolic toolbox, koji omogućava:
  - Unos izraza u simboličkom obliku sa simboličkim tipovima podataka
  - Razvoj i pojednostavljenje simboličkih izraza
  - Određivanje simboličkih korena, graničnih vrednosti, minimuma, maksimuma funkcija itd.
  - Određivanje izvoda i integrala funkcija
  - Razvoj funkcija u Taylor-ov red
  - Rešavanje algebarskih i diferencijalnih jednačina
  - Rešavanja sistema jednačina
  - Grafički prikaz simboličkih funkcija

Kreiranje simboličkih promenljivih

- Simboličke promenljive se kreiraju koristeći funkciju `sym`:

```
>> x = sym('x');
```

ili pomoću naredbe `syms` (skraćeni oblik funkcije `sym`):

```
>> syms x;
```

- Više simboličkih promenljivih se deklariše na sledeći način:

```
>> syms x y z;
```

Kreiranje simboličkih izraza

- Kreiranje izraza sa postojećom simboličkom promenljivom:

```
>> y = (x+1)^2;
>> z = exp(2*x);
```

- Simbolički izraz se može kreirati funkcijom `sym`:

```
>> y = sym('(x+1)^2');
>> z = sym('exp(2*x)');
```

ali će ovaj način biti izbačen u budućim verzijama MATLAB-a, gde će se zahtevati da se prvo kreiraju simboličke promenljive, a kasnije da se kreiraju izrazi sa njima.

Manipulisanje simboličkim izrazima

- Funkcija numden razdvaja imenilac i brojilac simboličkog razlomka:

```
>> y = 4*(x+1)^2/(x^3+3*x^2-x+7);
>> [br, im] = numden(y)
br =
4*(x + 1)^2
im =
x^3 + 3*x^2 - x + 7
```

Razvoj simboličkog izraza

- Funkcija expand razvija simbolički izraz u obliku zbira proizvoda.
- Najviše se koristi kod polinoma, ali može i kod trigonometrijskih, eksponencijalnih i logaritamskih funkcija.

```
>> syms x y
>> expand(4*(x+1)^2)

4*x^2 + 8*x + 4

>> expand(sin(x+y))

cos(x)*sin(y) + cos(y)*sin(x)

>> expand(exp(2*x-3*y))

exp(2*x)*exp(-3*y)
```

Faktorizacija simboličkog izraza

- Faktorizacija predstavlja razlaganje nekog objekta (npr. broja, polinoma ili matrice) u obliku proizvoda nekih drugih objekata, tzv. faktora. Na primer, faktori polinoma x^2+3x+2 su $x+1$ i $x+2$, jer važi $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$.
- Funkcija `factor` faktoriše simbolički izraz.
- Najviše se koristi kod polinoma, ali može i kod trigonometrijskih, eksponencijalnih i logaritamskih funkcija.

```
>> factor(x^3+2*x^2+x)
ans = [ x, x + 1, x + 1]
>> factor(x^2 * y^2, x)
ans = [y^2, x, x]
```

Pojednostavljenje simboličkog izraza

- Funkcija `simplify` pojednostavljuje simbolički izraz.

```
>> simplify((x+2)^2-4*x)
ans = x^2 + 4
>> simplify(sin(x)^2 + cos(x)^2)
ans = 1
>> simplify(exp(log(3*x)))
ans = 3*x
```

Rešavanje jednačina

- Funkcija `solve` rešava jednačinu ili sistem jednačina.

```
>> y = x^2 - 9
>> solve(y)
ans = -3  3
>> syms a b c
>> solve(a*x^2+b*x+c)
ans =
 -(b + (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
 -(b - (b^2 - 4*a*c)^(1/2))/(2*a)
>> solve(a*x^2+b*x+c,a)
ans =
-(c + b*x)/x^2
```

Rešavanje sistema jednačina

- Kod rešavanja sistema jednačina, prvo se jednačine zadaju kao simbolički izrazi, a zatim se te jednačine proslede funkciji `solve`.
- Pri rešavanju sistema, izrazi se izjednačavaju sa 0.

```
>> prva = 3*x+2*y-z-10;
>> druga = -x+3*y+2*z-5;
>> treca = x-y-z+1;
>> [x0,y0,z0] = solve(prva, druga, treca)
x0 = -2
y0 =  5
z0 = -6
```

Zamena simbola

- Funkcija subs menja simbol u izrazu nekim drugim simbolom ili dodeljuje vrednost promenljivoj.
- Pri rešavanju sistema, izrazi se izjednačavaju sa 0.

```
>> izraz = x^2 + 3*x*y - 2*y^2;
>> subs(izraz, y, x)
ans = 2*x^2
>> subs(izraz, y, 1)
ans = x^2 + 3*x - 2
>> subs(izraz, {x,y}, {1,2})
ans = -1
```

Izvod funkcije

- Za traženje izvoda funkcije se koristi funkcija `diff`.
- Red izvoda se navodi kao drugi argument. Podrazumevano je 1.

```
>> izraz = x^3 + 3*x^2 - 4;
>> diff(izraz)
ans = 3*x^2 + 6*x
>> diff(izraz,2)          <- Drugi izvod po x
ans = 6*x + 6
>> izraz = x^3 + 3*sin(y^2) – x*y;  <- Drugi izvod po y
>> diff(izraz, y, 2);
ans = 6*cos(y^2) - 12*y^2*sin(y^2)
```

Integral funkcije

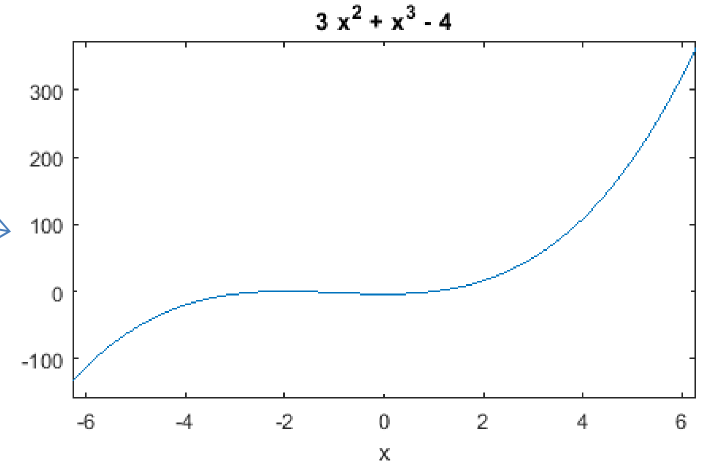
- Za traženje integrala funkcije, koristi se funkcija `int`.
- Može se računati neodređeni (ne navode se granice) i određeni integral (navode se granice).

```
>> izraz = x^3 + 3*x^2 - 4;
>> int(izraz)
ans = (x*(x^3 + 4*x^2 - 16))/4
>> int(izraz,0,3)         <- Određeni integral
ans = 141/4
>> izraz = x^3 + 3*sin(y) - x*y;
>> int(izraz, y);         <- Integral po promenljivoj
ans = y*x^3 - (y^2*x)/2 - 3*cos(y)
```

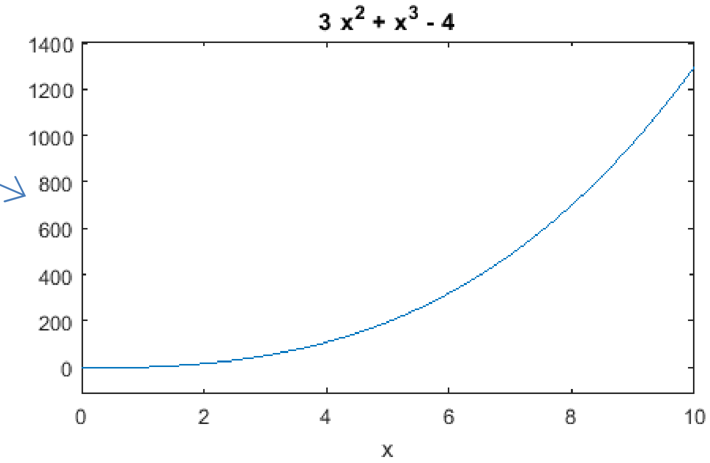
Crtanje simboličkih funkcija

- Za crtanje simboličkih funkcija, koristi se funkcija `ezplot`.
- Ukoliko se ne zada interval, podrazumevani je [-2π, 2π].

```
>> fun = x^3 + 3*x^2 - 4;
>> ezplot(fun)
```




```
>> ezplot(fun,0,10)
```



Za vežbu

- Koristeći simbolički račun, rešiti sistem jednačina:
  x + 2y - z = 4
  3x + 8y + 7z = 20
  2x + 7y + 9z = 23

- Brzina automobila je data relacijom $v = t^2 - 3t + 5$, gde t predstavlja vreme. Odrediti pređeni put u intervalu [1,5], kao i ubrzanje u t=1.5 s. Nacrtati grafik pređenog puta u intervalu [0,10].