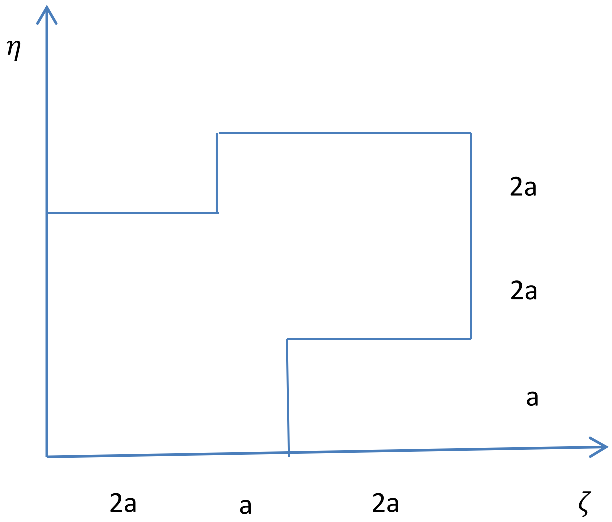
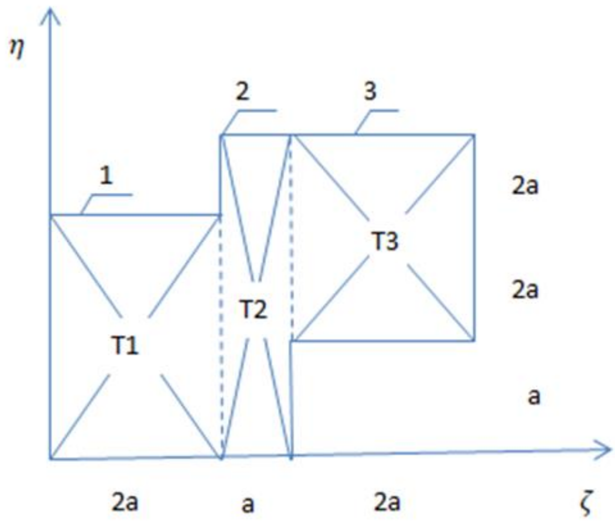
Zadatak 1. Koristeći zadati postavljeni koordinatni sistem, odrediti glavne težišne momente inercije i skicirati elipsu inercije za poprečni presjek prikazan na slici.



- Prvi korak pri proračunu jeste određivanje težišta ukupne figure. S toga bitno je podjeliti istu na jednostavne geometrijske slike. Pa je s obzirom na to, navedeni presjek podjeljen na tri pravougaonika, sa težištima T_1, T_2 i T_3, koja se nalaze u sjecištu dijagonala. Za svaki od tri pravougaonika potrebno je odrediti koodinate težišta, s obzirom na postavljeni koordinatni sistem. Pomjeranje po x-osi je ζ, a po y-osi je η. Osim koordinata težišta, potrebno je izračunati i površinu A za svaku sliku pojedinačno.



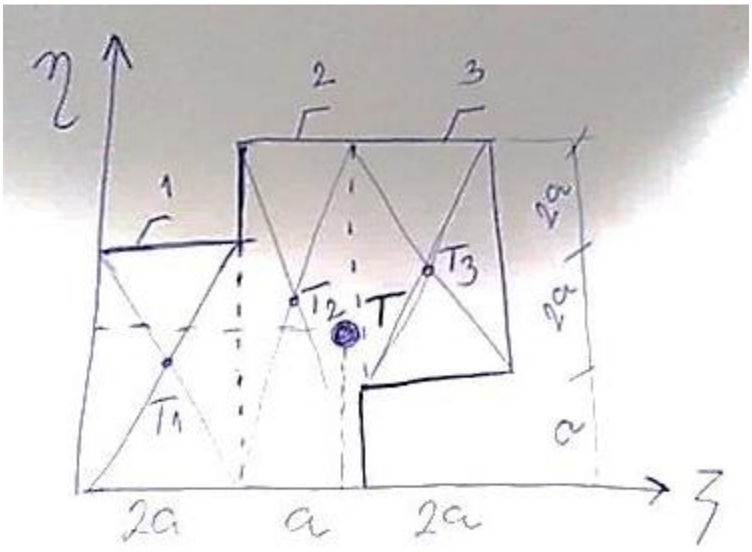
Pravougaonik 1. $\zeta_{T1} = a, \quad \eta_{T1} = 1{,}5a, \quad A_1 = 2a * 3a = 6a^2$
Pravougaonik 2. $\zeta_{T2} = 2{,}5a, \quad \eta_{T2} = 2{,}5a \quad A_2 = a * 5a = 5a^2$
Pravougaonik 3. $\zeta_{T3} = 4a, \quad \eta_{T3} = 3a \quad A_3 = 2a * 4a = 8a^2$

- Koordinate težišta cijele figure se računa na sljedeći način:

$$\zeta_T = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i \cdot \xi_{Ti}}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{6a^2 \cdot a + 5a^2 \cdot 2{,}5a + 8a^2 \cdot 4a}{6a^2 + 5a^2 + 8a^2} = 2{,}658a$$

$$\eta_T = \frac{\sum_{i=1}^{3} A_i \cdot \eta_{Ti}}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{6a^2 \cdot 1{,}5a + 5a^2 \cdot 2{,}5a + 8a^2 \cdot 3a}{6a^2 + 5a^2 + 8a^2} = 2{,}395a$$

Sada unosimo na crtež koordinate težišta.



- Momenti inercije za ose zadatog koordinatnog sistema:

$$I_{\zeta i} = I_{\zeta 1} + I_{\zeta 2} + I_{\zeta 3} = 142{,}334a^4$$

$$I_{\zeta 1} = I_{x1} + \eta_{T1}^2 \cdot A_1 = \frac{b \cdot h^3}{12} + \eta_{T1}^2 \cdot A_1 = \frac{2a \cdot (3a)^3}{12} + \eta_{T1}^2 \cdot A_1 = 18a^4$$

$\frac{b \cdot h^3}{12} - za\ pravougaonik\ iz\ tabele$ 3.6

$$I_{\zeta 2} = I_{x2} + \eta_{T2}^2 \cdot A_2 = \frac{b \cdot h^3}{12} + \eta_{T2}^2 \cdot A_2 = \frac{a \cdot (5a)^3}{12} + \eta_{T2}^2 \cdot A_2 = 41{,}667a^4$$

$$I_{\zeta 3} = I_{x3} + \eta_{T3}^2 \cdot A_3 = \frac{b \cdot h^3}{12} + \eta_{T3}^2 \cdot A_3 = \frac{2a \cdot (4a)^3}{12} + \eta_{T3}^2 \cdot A_3 = 82{,}667a^4$$

$$I_{\eta i} = I_{\eta 1} + I_{\eta 2} + I_{\eta 3} = 170{,}334a^4$$

$$I_{\eta 1} = I_{y1} + \zeta_{T1}^2 \cdot A_1 = \frac{h \cdot b^3}{12} + \xi_{T1}^2 \cdot A_1 = \frac{3a \cdot (2a)^3}{12} + \zeta_{T1}^2 \cdot A_1 = 8a^4$$

$$\frac{h \cdot b^3}{12} - za\ pravougaonik\ iz\ tabele\ 3.6$$

$$I_{\eta 2} = I_{y2} + \zeta_{T2}^2 \cdot A_2 = \frac{h \cdot b^3}{12} + \xi_{T2}^2 \cdot A_2 = \frac{5a \cdot (a)^3}{12} + \zeta_{T1}^2 \cdot A_1 = 31{,}667a^4$$

$$I_{\eta 3} = I_{y3} + \zeta_{T3}^2 \cdot A_3 = \frac{h \cdot b^3}{12} + \xi_{T3}^2 \cdot A_3 = \frac{4a \cdot (2a)^3}{12} + \zeta_{T1}^2 \cdot A_1 = 130{,}667a^4$$

$$I_{\zeta\eta} = I_{\zeta\eta 1} + I_{\zeta\eta 2} + I_{\zeta\eta 3} = 136{,}25a^4$$

$$I_{\zeta\eta 1} = I_{x1y1} + \zeta_{T1} \cdot \eta_{T1} \cdot A_1 = 0 + \zeta_{T1} \cdot \eta_{T1} \cdot A_1 = 9a^4$$

$$I_{x1y1} = 0 - za\ sve\ simetrične\ figure$$

$$I_{\zeta\eta 2} = I_{x2y2} + \zeta_{T2} \cdot \eta_{T2} \cdot A_2 = 0 + \zeta_{T2} \cdot \eta_{T2} \cdot A_2 = 31{,}25a^4$$

$$I_{\zeta\eta 3} = I_{x3y3} + \zeta_{T3} \cdot \eta_{T3} \cdot A_3 = 0 + \zeta_{T3} \cdot \eta_{T3} \cdot A_3 = 96a^4$$

- Prema Hajgens-Štajnerovoj teoremi izračunavamo momente inercije za težišni koordinatni sistem xy:

$$I_X = I_\zeta - \eta_T^2 \sum_{i=1}^{3} A_i = 142{,}334a^4 - (2{,}395a)^2 \cdot 19a^2 = 33{,}35a^4$$

$$I_Y = I_\eta - \zeta_T^2 \sum_{i=1}^{3} A_i = 170{,}334a^4 - (2{,}658a)^2 \cdot 19a^2 = 36{,}1a^4$$

$$I_{XY} = I_{\zeta\eta} - \zeta_T \eta_T \sum_{i=1}^{3} A_i = 136{,}25a^4 - 2{,}395 \cdot 2{,}658 \cdot 19a^2 = 15{,}298a^4$$

- Veličina ugla za koji treba zarotirati težišni sistem osa xy u glavni težišni koordinatni sistem 12:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{XY}}{I_X - I_Y} = 11{,}126$$

$$2\alpha = arctg 11{,}126 \Longrightarrow \alpha = 42{,}432°$$

- Primjenom obrazaca za izračunavanje vrijednosti glavnih težišnih momenata inercije zadatog poprečnog presjeka dobijamo:

$$I_{12} = \frac{I_X + I_Y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_X - I_Y)^2 + 4I_{XY}^2}$$

$$I_1 - uzimamo\ sa\ međuznakom +, pa\ dobijamo\ 50,067a^4$$

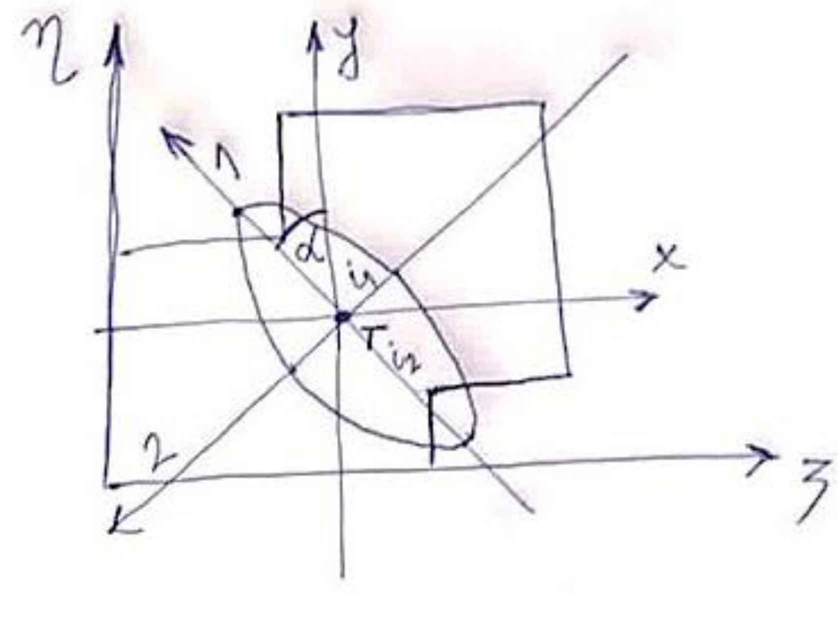
$$I_2 - uzimamo\ sa\ međuznakom -, pa\ dobijamo\ 19,383a^4$$

- Poluprečnici elipse inercije presjeka su:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{50{,}067a^4}{19a^2}} = 1{,}623a$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{19{,}383a^4}{19a^2}} = 1{,}01a$$

- Kod crtanje elipse inercije treba povesti računa o vrijednosti momenata inercije. U našem slučaju, pošto je $I_Y > I_X$, glavna težišna osa 1 je zapravo osa y i ona se zaokreće za vrijednost ugla α. Osu 2 dobijamo kada je nacrtamo pod pravim uglom u odnosu na 1. Na kraju, poluprečnik i_1 nanosimo na osu 2, a poluprečnik i_2 na osu 1.



η
y
1
x
α
i_1
τ_{i_2}
2
ζ