VJEROVATNOĆA I STATISTIKA
materijal sa vježbi broj 1

Autori:
Dušan Jokanović, dusan.jokanovic@fpm.ues.rs.ba
Marina Milićević, marina.milicevic@fpm.ues.rs.ba

1.1 Osnovni pojmovi teorije vjerovatnoće

Zadatak 1. Strijelac gađa cilj sve dok ga ne pogodi dva puta ili ne promaši tri puta. Opisati prostor ishoda Ω kao i događaje:
A - poslednji hitac je promašaj;
B - treći hitac je pogodak;
C - cilj je pogođen dva puta.

Rješenje:
Ako sa 1 označimo događaj "cilj je pogođen", a sa 0 događaj "cilj je promašen", onda nam je prostor ishoda Ω:

$$\Omega = \{11, 011, 101, 000, 1000, 0100, 0010, 0011, 0101, 1001\}.$$

Događaji A, B, C predstavljaju podskupove prostora ishoda Ω definisane sa:
$A = \{000, 0010, 0100, 1000\}$;
$B = \{011, 101, 0011, 0010\}$;
$C = \{11, 011, 101, 0011, 0101, 1001\}$.

Zadatak 2. Strijelac ima četiri metka i gađa u cilj sve dok ga ne pogodi dva puta uzastopno ili dok ne izgubi šansu da ispuni taj uslov. Opisati prostor vjerovatnoće kao i događaje:
A - cilj je pogođen bar dva puta;
B - ostao je neiskorišten bar jedan metak;
C - više je promašaja nego pogodaka.

Rješenje:

Označimo sa 1 događaj "cilj je pogođen", a sa 0 događaj "cilj je promašen". Prostor elementarnih ishoda je skup:

$$\Omega = \{11, 011, 010, 100, 000, 0010, 0011, 1010, 1011\}.$$

Događaji A, B i C su podskupovi skupa ishoda dati sa:

$A = \{11, 011, 0011, 1010, 1011\}$;

$B = \{11, 011, 000, 010, 100\}$;

$C = \{0010, 010, 100, 000\}$.

Zadatak 3. Tri igrača A, B i C igraju turnir na sljedeći način. Prvu partiju igraju igrači A i B, a igrač C je slobodan. Drugu partiju igra C sa pobjednikom prve dvije i tako dalje, sve dok jedan igrač ne postigne dvije pobjede uzastopno. Registruju se rezultati partija. Opisati prostor ishoda Ω i događaje:

D - u trećoj partiji pobijedio je igrač C;

E - turnir se završio za manje od pet partija;

F - igran je paran broj partija.

Rješenje:

Uvedimo sljedeće oznake:

$A_i, i = 1, 2, \ldots$ - igrač A pobijedio je u i-toj partiji;

$B_i, i = 1, 2, \ldots$ - igrač B pobijedio je u i-toj partiji;

$C_i, i = 1, 2, \ldots$ - igrač C pobijedio je u i-toj partiji.

Prostor ishoda Ω je:

$$\Omega = \{A_1A_2, B_1B_2, A_1C_2C_3, B_1C_2C_3, A_1C_2B_3B_4, B_1C_2A_3A_4, \ldots\}.$$

Događaji D, E i F su:

$D = \{A_1C_2C_3, B_1C_2C_3\}$,

$E = \{A_1A_2, B_1B_2, A_1C_2C_3, B_1C_2C_3, A_1C_2B_3B_4, A_1C_2A_3A_4\}$,

$F = \{A_1A_2, B_1B_2, A_1C_2B_3B_4, B_1C_2A_3A_4, \ldots\}$.

Zadatak 4. Novčić se baca sve dok jedna strana ne padne dva puta zaredom. Registruje se niz pisama i glava. Opisati skup ishoda Ω kao i događaje:

A - da u četvrtom bacanju padne glava;

B - da u prvom bacanju padne pismo;

C - da glava padne više puta nego pismo.

Rješenje:

Označimo sa P i G događaje da je prilikom bacanja novčića palo pismo, odnosno grb. Prostor elementarnih ishoda Ω je sada:

$\Omega = \{GG, PP, PGG, GPP, PGPP, GPGG, \ldots\}$. Događaji A, B, C i D su podskupovi skupa Ω definisani sa:

$A = \{GPGG, PGPGG, PGPGPP, \ldots\}$,

$B = \{PP, PGG, PGPP, PGPGG, \ldots\}$,

$C = \{GG, PGG, GPGG, PGPGG, \ldots\}$.

1.2 Elementi kombinatorike

Zadatak 5. Koliko se različitih riječi (uključujući i one koje nemaju značenje) može dobiti premještanjem slova iz riječi STATISTIKA?

Rješenje:

Kako se u riječi STATISTIKA slovo S ponavlja 2 puta, slovo T 3 puta, slovo A 2 puta, slovo I 2 puta i slovo K 1 puta, to je ukupan broj različitih riječi jednak broju permutacija sa ponavljanjem dužine 10, pri čemu se elementi ponavljaju 3, 2, 2, 2, 1 put:

$$P^{10}_{3,2,2,2,1} = \frac{10!}{3!2!2!2!1!}.$$

Zadatak 6. Na koliko se načina 3 različite kuglice mogu staviti na 2 police?

Rješenje:

Označimo kuglice sa A, B i C, a police sa 1 i 2. Pridruživanje kuglica policama koja možemo posmatrati kao funkciju skupa $\{A, B, C\}$ u skup $\{1, 2\}$ su: $111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222$, pri čemu 111 znači sa su sve tri kuglice A, B, C pridružene polici 1, 112 znači da su kuglice A i B na polici 1, a kuglica C na polici 2, itd. Broj načina jednak je broju varijacija sa ponavljanjem treće klase od dva elementa, odnosno $2^3 = 8$.

U opštem slučaju, k različitih kuglica na n polica može se rasporediti na n^k načina.

Zadatak 7. Na koliko se načina 3 jednake kuglice mogu rasporediti na 2 police?

Rješenje:

Postoje 4 načina za ovakav raspored: sve tri kuglice na prvoj polici (111), sve tri kuglice na drugoj polici (222), dvije kuglice na prvoj, a jedna na drugoj

(112) i jedna kuglica na prvoj polici, a dvije na drugoj (122). Broj načina jednak je broju kombinacija sa ponavljanjem treće klase od dva elementa, odnosno $\binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = 4$.

U opštem slučaju, k jednakih kuglica može se rasporediti na n polica na $\binom{n+k-1}{k}$ načina.

Zadatak 8. Na koliko se načina k: (a) različitih, (b) jednakih kuglica može rasporediti na n polica ($k \leq n$), tako da se na svaku policu na koju se stavlja kuglica, stavlja tačno po jedna kuglica?

Rješenje:

(a) Broj načina jednak je broju varijacija bez ponavljanja k-te klase od n elemenata, odnosno $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

(b) Broj načina jednak je broju kombinacija bez ponavljanja k-te klase od n elemenata, odnosno $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Zadatak 9. Na koliko načina se tri novčanice od 10 KM, dvije od 20 KM i jedna od 50 KM mogu ubaciti u automat za kafu da bi se platile tri kafe od po 40 dinara? Prilikom ubacivanja novčanica u aparat nije bitna strana na koju je novčanica okrenuta.

Rješenje:

Uočavamo da je broj načina na koje možemo izabrati novčanice zapravo jednak broju permutacija sa ponavljanjem na skupu od 6 elemenata, pa imamo:

$$P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}.$$

Zadatak 10. Koliko se može napisati petocifrenih brojeva djeljivih sa 5, koristeći cifre $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ako se cifre: (a) ne ponavljaju, (b) ponavljaju?

Rješenje:

a) Da bi se zadovoljila djeljivost, cifra 5 mora biti na kraju broja. Moguće je napisati onoliko brojeva koliko ima načina da se preostalih 6 cifara rasporede na 4 mjesta, odnosno onoliko koliko ima varijacija četvrte klase od 6 elemenata, a to je: $V_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

b) Moguće je napisati onoliko brojeva koliko ima varijacija sa ponavljanjem 4-te klase od 7 elemenata, odnosno: $\overline{V}_7^4 = 7^4$.

Zadatak 11. Iz grupe od 10 muškaraca i 8 žena treba odabrati 6 osoba među kojima najmanje 3 treba da budu žene. Na koliko načina se može izvršiti ovakav izbor?

Rješenje:

Povoljni izbori su grupe od 6 osoba koje čine: 3 žene i 3 muškarca, 4 žene i 2 muškarca, 5 žena i jedan muškarac i grupa od 6 žena. Broj izbora je sada jednak:

$$C_3^8 \cdot C_3^{10} + C_4^8 \cdot C_2^{10} + C_5^8 \cdot C_1^{10} + C_6^8 =$$
$$= \binom{8}{3} \cdot \binom{10}{3} + \binom{8}{4} \cdot \binom{10}{2} + \binom{8}{5} \cdot \binom{10}{1} + \binom{8}{6} \cdot \binom{10}{0}$$
$$= 6720 + 3150 + 560 + 28 = 10458.$$

Zadatak 12. Na jednom košarkaškom takmičenju u prvom kolu učestvuju 64 tima i parovi su već određeni. Svi pobjednici se sastaju u drugom kolu i tako redom dok na kraju takmičenja ne ostane jedna ekipa kao ukupni pobjednik. Na koliko načina pobjede i porazi mogu biti raspoređeni na timove?

Rješenje:

U prvom kolu 64 tima odigraće 32 utakmice. Kako za svaku utakmicu postoje dva moguća ishoda (prvi tim da pobjedi, a drugi da izgubi i obrnuto), onda je broj mogućih rasporeda objeda i poraza na 32 utakmice zapravo 2^{32}.

U drugom kolu 32 tima odigraće 16 utakmica, u trećem 8, zatim 4, pa 2 i na kraju u finalu se igra jedna utakmica. Za 16 utakmica ima 2^{16} rasporeda, za 8 utakmica 2^8 i tako dalje, pa je ukupan broj mogućih rasporeda pobjeda i poraza:

$$2 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^8 \cdot 2^{16} \cdot 2^{32} = 2^{63}.$$

Zadatak 13. Jedna oktava na klaviru sastoji se od 5 crnih i 7 bijelih dirki. Koliko različitih melodija od 8 nota može biti odsvirano u okviru jedne oktave, uz uslov da se crne i bijele dirke koriste naizmjenčno?

Rješenje:

Označimo li sa $B(C)$ izbor bijele (crne) dirke na klaviru, onda postoje dva redoslijeda dirki koji odgovaraju uslovima zadatka. Ako je redoslijed dirki $BCBCBCBC$ onda je broj mogućnosti $7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 = 5^4 \cdot 7^4$. Za redoslijed dirki $CBCBCBCB$ imamo opet toliko mogućnosti pa ukupno možemo napraviti $2 \cdot 5^4 \cdot 7^4$ melodija.

Literatura

[1] Dušan Jokanović, Marina Milićević, *Vjerovtnoća i statistika*, Fakultet za proizvodnju i menažment Trebinje, ISBN: 978-99976-778-1-5, 2020.