ЗАДАЦИ ЗА ПРИПРЕМУ 1

1. Вриједност израза $\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{ab}{a+b}-a\right):\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ једнака је:

a) $\frac{-a^4}{a^2+b^2}$ b) 0 c) ab d) a^4

Примјењујући основне операције над алгебарски изразом долазимо до рјешења:

$$\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{ab}{a+b}-a\right):\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2-ab+ab}{a-b}\cdot\frac{ab-a^2-ab}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=$$
$$\frac{a^2}{a-b}\cdot\left(\frac{-a^2}{a+b}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{-a^4}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{a^2+b^2}=\frac{-a^4}{a^2+b^2}$$

2. Рјешење једначине $\frac{x^2-1}{x^2+x+1}<1$ је

a) $x>0$ b) $x>-2$ c) $x<3$

$$\frac{x^2-1}{x^2+x+1}<1\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x^2+x+1}-1<0\Leftrightarrow\frac{x^2-1-x^2-x-1}{x^2+x+1}<0\Leftrightarrow\frac{-2-x}{x^2+x+1}<0\,.$$

Да би вриједност била мања од нуле, бројилац и именилац морају бити различитог знака. У имениоцу имамо квдратни трином x^2+x+1 та који важи да је

$D=-3<0$ i $a=1>0$,

па овај трином нема реалних нула и увијек је позитиван.

Дакле, разломак је мањи од нуле ако и само ако је $-2-x<0$, ра imamo:

$$-2-x<0\Leftrightarrow x>-2.$$

3. Рјешење једанчине $3^x - 2\cdot 3^{x-1} = \frac{1}{9}$ је

a) $x=-1$ b) $x=0$ c) $x=5$

Дату експоненцијалну једначину ћемо ријешити тако што десну страну једначине напишемо као експоненцијалну фунцкију са базом 3:

$$3^x - 2\cdot 3^{x-1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x - 2\cdot 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{1}{3^2} \Leftrightarrow 3^x\left(1-\frac{2}{3}\right) = 3^{-2}$$

Након извршавања назначених операција, лијева и десна страна једанкости сведене су на спепен истих основа.

$$3^x \cdot \frac{1}{3} = 3^{-2} \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^{-2}$$

Како су два степена једнака ако су им једнаке основе и ако су им једнаки експоненти, једначина се своди на: $x-1=-2$, одакле слиједи да је $x=-1$.

4. Наћи *m* за које је један коријен једначине $x^2-(2m-1)x+m^2+2=0$ два пута већи од другог.

a) $m_1=2,\ m_2=4$ b) $m=0$ c) $m=-4$

Користећи Вијетова правила по којима за квадратну једначину $ax^2+bx+c=0$ и њене коријене $x_1,\ x_2$ важе једнакости:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ \ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

долазимо до сљедећих једначина:

$$x_1+x_2=\frac{2m-1}{1};\ \ x_1\cdot x_2=\frac{m^2+2}{1}.$$

Из услова задатка имамо да је $x_1 = 2x_2$, што уврштавамо у претходне изразе и долазимо до:

$$3x_1 = 2m-1 \Rightarrow x_1 = \frac{2m-1}{3}$$
$$2{x_1}^2 = m^2 + 2 \Rightarrow {x_1}^2 = \frac{m^2+2}{2}$$

Након што замјенимо x_1 из друге једначине са изразом за x_1 из прве једначине имамо једнакост:

$$\left(\frac{2m-1}{3}\right)^2 = \frac{m^2+2}{2}$$
$$8m^2 - 8m + 2 = 9m^2 + 18$$
$$m^2 + 8m + 16 = 0$$

Задатак смо свели на квадратну једначину коју даље рјешавамо: $D = b^2 - 4ac = 0$. Како је D = 0 рјешења ове једначине су реална и једнака

$$m_{1,2} = \frac{-b}{2a} = -4 \cdot$$

Дакле за *m=-4* једно рјешење једначине је 2 пута веће од другог.

5. Рјешење једначине $2\cos^2 x - 7\cos x = 4$ је:

d) $x_1 = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ i $x_2 = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ e) $x_1 = k\pi$ i $x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ f) $x_1 = x_2 = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

У задатку имамо тригонометријску једначину која се смјеном лако може свести на квадратну. Уведимо смјену $\cos x = t$, $-1 \le t \le 1$ и добићемо $2t^2 - 7t - 4 = 0 \Leftrightarrow$, односно:

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4} \Leftrightarrow t_1 = -\frac{1}{2},\ t_2 = 4.$$

Рјешење t_2 = 4 одбацујемо због ограничености функције $cos(x)$, односно због $-1 \le t \le 1$. Посматрамо једначину $\cos x = -\frac{1}{2}$. Функција $cos(x)$ је негативна у другом и трећем квадранту па имамо:

$$x_1 = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \text{ i } x_2 = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, \text{ za } k \in \mathbb{Z}.$$

ЗАДАЦИ ЗА ПРИПРЕМУ БРОЈ 2

1. Вриједност израза $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{ab-b^2}{a^2+ab}$ једнака је:

a) $\frac{b}{a}$ b) 0 c) ab d) a^4

Примјењујући основне операције над алгебарски изразом долазимо до рјешења:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{ab-b^2}{a^2+ab}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{b(a-b)}{a(a+b)}=\frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{b(a-b)}{a(a+b)}=\frac{b}{a}$$

2. Рјешење једначине $\frac{x^2-4}{x^2+x+1}<1$ је

d) $x>0$ e) $x>-5$ f) $x<3$

$$\frac{x^2-4}{x^2+x+1}<1\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{x^2+x+1}-1<0\Leftrightarrow\frac{x^2-4-x^2-x-1}{x^2+x+1}<0\Leftrightarrow\frac{-5-x}{x^2+x+1}<0$$

Да би рационалан израз био мањи од нуле, бројилац и именилац морају бити различитог знака. У имениоцу имамо квадратни трином x^2+x+1 за кога важи да је:

$$D=-3<0 \text{ i } a=1>0,$$

па овај трином нема реалних нула и увијек је позитиван.

Дакле, разломак је мањи од нуле ако и само ако је -5-x<0, па имамо

$$-5-x<0\Leftrightarrow x>-5.$$

Закључујемо на крају да је рјешење једначине x > -5.

3. Рјешење једначине $4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$ је

a) $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$ b) $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$ c) $x_1 = 5, x_2 = 0$

Дату експоненцијалну једначину ћемо ријешити тако што лијеву страну напишемо као експоненцијалну функцију са базом 2.

$$4^x = 2^{\frac{x+1}{x}} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{x+1}{x}}$$

Како су нам сада и лијева и десна страна једнакости степени са базом 2, можемо им изједначити експоненте и тако доћи до квадратне једначине.

$$2^{2x} = 2^{\frac{x+1}{x}} \Leftrightarrow 2x = \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

Даље рјешавамо квадратну једначину:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}$$

4. Наћи *m* за које је један корјен једначине $(m-3)x^2 - (m+4)x + 3m = 0$ три пута већи од другог. Рјешење:

a) $m_1 = 4, m_2 = -\frac{4}{15}$ b) $m = 4$ c) $m_1 = 2,\ m_2 = -2$

Користећи Вијетова правила по којима за квадратну једначину $ax^2 + bx + c = 0$ и њене коријене $x_1,\ x_2$ важе једнакости:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

долазимо до следећих једначина:

$$x_1+x_2=\frac{m+4}{m-3};\;\; x_1\cdot x_2=\frac{3m}{m-3}$$

Из услова задатка имамо да је $x_2 = 3x_1$, што уврштавамо у претходне изразе и долазимо до:

$$4x_1=\frac{m+4}{m-3}\Rightarrow x_1=\frac{m+4}{4(m-3)}$$
$$3{x_1}^2=\frac{3m}{m-3}\Rightarrow {x_1}^2=\frac{m}{m-3}$$

Након што замјенимо x_1 из друге једначине са изразом за x_1 из прве једначине имамо једнакост:

$$\left(\frac{m+4}{4(m-3)}\right)^2=\frac{m}{m-3}$$
$$m^2+8m+16=16m^2+48m$$
$$15m^2+56m-16=0$$

Задатак смо свели на квадратну једначину $15m^2+56m-16=0$ коју даље рјешавамо:

$$D=b^2-4ac=4096\,.$$

$$m_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=4;\;\; m_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{4}{15}$$

Дакле, за $m=4$ і $m=-\frac{4}{15}$ једно рјешење једначине је три пута веће од другог.

5. Рјешење једначине $\sin^2 x-3\sin x+2=0$ је

a) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ b) $x=0$ c) $x=2k\pi$

У питању је тригонометријска једначина која се смјеном $\sin x = t, |t|\le 1$ своди на квадратну једначину, како слиједи:

$$\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0;\ \sin x = t$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 1,\ \mathrm{t}_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{3+1}{2} = 2,\ t_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\sin x = 2 \Rightarrow \textit{нема рјешења}$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Како је y= sin x ограничена функција прво рјешење смо одбацили.

ЗАДАЦИ ЗА ПРИПРЕМУ БРОЈ 3

1. Вриједност израза $\left(\frac{a}{3a-6}+\frac{a}{a+2}+\frac{4a}{a^2-4}\right):\frac{a-4}{a-2}$ једнака је:

a) $\frac{b}{a}$ b) 0 c) $\frac{4a}{3(a-4)}$ d) a^4

Примјењујући основне операције над алгебарским изразом долазимо до рјешења:

$$\left(\frac{a}{3a-6}+\frac{a}{a+2}+\frac{4a}{a^2-4}\right):\frac{a-4}{a-2}=\left(\frac{a}{3(a-2)}+\frac{a}{a+2}+\frac{4a}{(a-2)(a+2)}\right):\frac{a-4}{a-2}=$$

$$\frac{a(a+2)+3a(a-2)+12a}{3(a-2)(a+2)}:\frac{a-4}{a-2}=\frac{a(a+2+3a-6+12)}{3(a-2)(a+2)}\cdot\frac{a-2}{a-4}=\frac{a(4a+8)}{3(a-4)(a+2)}=$$

$$=\frac{4a(a+2)}{3(a-4)(a+2)}=\frac{4a}{3(a-4)}$$

2. Рјешење неједначине $\frac{x^2-1}{x^2+x+6}<1$ је

a) $x>0$ a) $x>-7$ b) $x<3$

$$\frac{x^2-1}{x^2+x+6}<1\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x^2+x+6}-1<0\Leftrightarrow\frac{x^2-1-x^2-x-6}{x^2+x+6}<0\Leftrightarrow\frac{-7-x}{x^2+x+6}<0$$

Да би претходни израз био мањи од нуле, бројилац и именилац морају бити различитог знака. У имениоцу имамо квадратни трином x^2+x+6 за кога важи да је $D<0$ i $a=1>0$, па овај трином нема реалних нула и увијек је позитиван.

Дакле, разломак је мањи од нуле ако и само ако је -7-x<0, па имамо:

$$-7-x<0\Leftrightarrow x>-7.$$

3. Рјешење једначине $8^{x+1}=16\cdot 2^{x-2}$ је

a) $x=\frac{-1}{2}$ b) $x=0$ c) $x=5$

Експоненцијалну једначину ћемо ријешити тако што обје стране једнакости трансформишемо на сљедећи начин:

$$2^{3(x+1)}=2^4\cdot 2^{x-2}\Leftrightarrow 2^{3(x+1)}=2^{4+x-2}\Leftrightarrow 3x+3=4+x-2$$

$$2x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

4. Наћи p за које је један коријен једначине $x^2-8x+p=0$ три пута већи од другог.

Рјешење:

a) $p=12$ b) $p=0$ c) $p=5$

Користећи Вијетова правила по којима за квадратну једначину $ax^2+bx+c=0$ и њене коријене x_1, x_2 важе једнакости:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ \ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

долазимо до сљедећих једначина:

$$x_1+x_2=8;\ \ x_1\cdot x_2=p\ .$$

Из услова задатака $x_2 = 3x_1$ уврштавамо у претходне изразе и долазимо да је

$$4x_1=8\Rightarrow x_1=2$$

$$3{x_1}^2=p\Rightarrow {x_1}^2=\frac{p}{3}$$

Како је $x_1^2=4$, лако долазимо до $p=12$.

Дакле, за p=12 једно рјешење једначине је 3 пута веће од другог.

5. Рјешење једначине $2\sin^2 x+3\sin+1=0$ је

a) $x_1=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,$ b) $x_1=0,$ c) $x_1=\pi,$ $x_2=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \qquad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$$

Тригонометријску једначину смо помоћу смјене $sin\ x = t, |t| \leq 1$ свели на квадратну једначину.

$$2\sin^2 x + 3\sin + 1 = 0$$

$$\sin x = t,\ |t| \leq 1$$

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$D = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2},\ t_1 = \frac{-3-1}{4} = -1$$

За $t_1 = -\frac{1}{2}$ након враћања у смјену имамо једначину $\mathrm{y} = \sin x = -\frac{1}{2}$. Како је $y = sinx$ периодична функција која узима негативне вриједности у трећем и четвртом квадранту имамо два рјешња: $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
За $t_2 = -1$ након враћања у смјену имамо једначину $\sin x = -1$, односно $x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ЗАДАЦИ ЗА ПРИПРЕМУ БРОЈ 4

1. Вриједност израза $\frac{3a^3b-18ab^3}{a^2-3ab}$ једнака је:

a) $\frac{b}{a}$ b) 0 c) ab d) $3b(a+3b)$

Примјењујући основне операције над алгебарски изразом долазимо до рјешења:

$$\frac{3a^3b-18ab^3}{a^2-3ab}=\frac{3ab\left(a^2-9b^2\right)}{a(a-3b)}=\frac{3ab(a-3b)(a+3b)}{a(a-3b)}=3b(a+3b)$$

2. Рјешење неједначине $\frac{x^2-16}{x^2+x+10}<1$ је

a) $x>0$ b) $x>-26$ c) $x<3$

$$\frac{x^2-16}{x^2+x+10}<1 \Leftrightarrow \frac{x^2-16}{x^2+x+10}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-16-x^2-x-10}{x^2+x+10}<0 \Leftrightarrow \frac{-26-x}{x^2+x+10}<0$$

Да би рационалан израз био мањи од нуле, бројилац и именилац морају бити различитог знака. У имениоцу имамо квадратни трином x^2+x+10 за кога важи да је:

$$D=-39\ <0 \text{ i } a=1>0,$$

па овај трином нема реалних нула и увијек је позитиван.

Дакле, разломак је мањи од нуле ако и само ако је -26 – x < 0, па имамо

$$-26-x<0 \Leftrightarrow x>-26.$$

Закључујемо на крају да је рјешење неједначине x > -26.

3. Рјешење једначине $16^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{2}}$ је

a) $x = -1$ b) $x_1 = -2,\ x_2 = 2$ c) $x = 5$

Експоненцијалну једначину ћемо ријешити тако што обје стране једнакости напишемо као експоненцијалне функције са базом 2:

$$16^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 2^{\frac{4}{x}} = 2^{x} \Leftrightarrow \frac{4}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$$

4. Наћи а за које је један корјен једначине $(a+5)x^2 - 3ax + 2a - 1 = 0$ два пута већи од другог. Рјешење:

a) a =5/9 b) a =-3 c) a =2

Користећи Вијетова правила по којима за квадратну једначину $ax^2 + bx + c = 0$ и њене коријене $x_1,\ x_2$ важе једнакости:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

долазимо до сљедећих једначина:

$$x_1 + x_2 = \frac{3a}{a+5};\ \ x_1 \cdot x_2 = \frac{2a-1}{a+5}$$

Из услова задатка имамо да је $x_2 = 2x_1$, што уврштавамо у преходне изразе и долазимо до:

$$3x_1 = \frac{3a}{a+5} \Rightarrow x_1 = \frac{a}{a+5}$$

$$2x_1^2 = \frac{2a-1}{a+5} \Rightarrow x_1^2 = \frac{2a-1}{2(a+5)}$$

Након што замјенимо x_1 из друге једначине са изразом за x_1 из прве једначине имамо једнакост:

$$\frac{a^2}{(a+5)^2}=\frac{2a-1}{2(a+5)}$$

$$2a^2=2a^2-a+10a-5$$

$$a=\frac{5}{9}$$

Дакле за а =5/9 једно рјешење једначине је 2 пута веће од другог.

5. Рјешење једначине $2\cos^2 x-7\cos x+3=0$ је

a) $x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi,$ $x_2=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ b) $x_1=\pi+2k\pi,$ $x_2=-\pi+2k\pi$ c) нема рјешња

Тригонометријску једначину смо помоћу смјене $t=cosx, |t|\leq 1$ свели на квадратну једначину

$$2\cos^2 x-7\cos x+3=0$$

$$\cos x=t$$

$$2t^2-7t+3=0$$

$$D=25\Rightarrow t_1=\frac{7+1}{4}=3,\ t_2=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\cos x=3 \text{ нема рјешења } -1\leq \cos x\leq 1$$

$$\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

ЗАДАЦИ ЗА ПРИПРЕМУ БРОЈ 5

1. Вриједност израза $ab \neq 0$ i $a \neq b$ $\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right)\cdot\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-4\right)\cdot\frac{ab}{a^3-b^3}$ једнака је:

a) $\frac{b}{a}$ b) 0 c) $\frac{a-b}{ab}$ d) a^4

Примјењујући основне операције над алгебарски изразом долазимо до рјешња:

Za $ab \neq 0$ i $a \neq b$ je

$$\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right)\cdot\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-4\right)\cdot\frac{ab}{a^3-b^3}=\frac{(a+b)^2-ab}{ab}\cdot\frac{(a+b)^2-4ab}{ab}\cdot\frac{ab}{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{ab}\cdot\frac{(a-b)^2}{ab}\cdot\frac{ab}{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}=\frac{a-b}{ab}.$$

2. Рјешење неједначине $\frac{x^2-4}{x^2+2x+10}<1$ је

a) $x>0$ b) $x>-7$ c) $x<3$

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x+10}<1 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2+2x+10}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4-x^2-2x-10}{x^2+2x+10}<0 \Leftrightarrow \frac{-14-2x}{x^2+2x+10}<0$$

Да би разломак био мањи од нуле, бројилац и именилац морају бити различитог знака. У имениоцу имамо квадратни трином x^2+x+10 за кога важи да је:

$$D=-36\ <0 \text{ i } a=1>0,$$

па овај трином нема реалних нула и увијек је позитиван.

Дакле, разломак је мањи од нуле ако и само ако је -14 – 2x < 0, па имамо

$$-14-2x<0 \Leftrightarrow x>-7.$$

Закључујемо на крају да је рјешње неједначине x > -7.

3. Рјешење једначине $16\cdot 2^{5x+2}=2^{x^2}$ је

a) $x_1=6,\ x_2=-1$ b) $x_1=0,\ x_2=-1$ c) $x_1=\ x_2=-1$

Експоненцијалну једначину ћемо ријешити тако што обје стране једнакости написати као експоненцијалну функцију са базом 2

$$16\cdot 2^{5x+2}=2^{x^2} \Leftrightarrow 2^4\cdot 2^{5x+2}=2^{x^2} \Leftrightarrow 2^{5x+6}=2^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$5x+6=x^2 \Leftrightarrow x^2-5x-6=0$$

$$D=25+24=49, x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1=\frac{5+7}{2}=6,\ x_2=\frac{5-7}{2}=-1$$

4. Наћи m за које је један коријен једначине $x^2-(1+2m)x+m^2+2=0$ два пута већи од другог. Рјешење:

a) $m=-4$ b) $m_1=0,\ m_2=5$ c) $m=4$

Користећи Вијетова правила по којима за квадратну једначину $ax^2+bx+c=0$ и њене коријене $x_1,\ x_2$ важе једнакости:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ \ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

долазимо до сљедећих једначина:

$$x_1+x_2=\frac{1+2m}{1};\ \ x_1\cdot x_2=\frac{m^2+2}{1}$$

Из услова задатака долазимо да је $x_2 = 2x_1$ уврштавамо у претходне изразе и долазимо да:

$$3x_1 = 1 + 2m \Rightarrow x_1 = \frac{1+2m}{3}$$
$$2{x_1}^2 = m^2 + 2 \Rightarrow {x_1}^2 = \frac{m^2+2}{2}$$

Након што замјенимо x_1 из друге једначине са изразом x_1 из прве једначине имамо израз:

$$\left(\frac{1+2m}{3}\right)^2 = \frac{m^2+2}{2}$$
$$-m^2 + 8m - 16 = 0$$

Задатак се свео на квадратну једначину $-m^2+8m-16=0$, за коју важи да је $D=0$, па су њена рјешења реална и једнака: $m_{1,2} = \frac{-b}{2a} = 4$.

Дакле, за m = 4 једно рјешење једначине је 2 пута веће од другог.

5. Рјешење једначине $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$ је

d) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ f) $x_1 = x_2 = \pi$

Тригонометријску једначину смо помоћу смјене sinx=t, $|t| \leq 1$ свели на квадратну једначину.

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$
$$\sin x = t, |t| \leq 1$$
$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$
$$D = 9 \Rightarrow t_1 = \frac{5+3}{4} = 2,\ t_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\sin x = 2 \text{ нема рјешења } -1 \leq \sin x \leq 1$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Прво рјешење смо одбацили због ограничености функције y=sin x. Како је функција y=sin x позитивна у првом и другом квадранту имамо два рјешења једначине $\sin x = \frac{1}{2}$.

ЗАДАЦИ ЗА ПРИПРЕМУ БРОЈ 6

1. Вриједност израза $ab \neq 0$ и $a \neq b$ је $\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right)\cdot\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-4\right)\cdot\frac{ab}{a^3-b^3}$ је:

a) $\frac{a-b}{ab}$ b) 0 c) ab d) a^4

Примјењујући основне операције над алгебарски изразом долазимо до рјешења:

$$\text{Za } ab \neq 0 \text{ i } a \neq b \text{ je}$$

$$\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right)\cdot\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-4\right)\cdot\frac{ab}{a^3-b^3}=\frac{(a+b)^2-ab}{ab}\cdot\frac{(a+b)^2-4ab}{ab}\cdot\frac{ab}{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{ab}\cdot\frac{(a-b)^2}{ab}\cdot\frac{ab}{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}=\frac{a-b}{ab}.$$

2. Рјешење једначине $\frac{x^2-9}{x^2+x+10}<1$ је

a) $x>0$ b) $x>-19$ c) $x<3$

$$\frac{x^2-9}{x^2+x+10}<1 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x^2+x+10}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9-x^2-x-10}{x^2+x+10}<0 \Leftrightarrow \frac{-19-x}{x^2+x+10}<0$$

Да би претходни израз био мањи од нуле, бројилац и именилац морају бити различитог знака. У имениоцу имамо квадратни трином x^2+x+10 за кога важи да је:

$$D=-39<0 \text{ i } a=1>0,$$

па овај трином нема реалних нула и увијек је позитиван.

Дакле, разломак је мањи од нуле ако и само ако је -19 – x < 0, па имамо

$$-19-x<0 \Leftrightarrow x>-19.$$

Закључујемо на крају да је рјешење неједначине x > -19.

3. Рјешење једначине $100\cdot 10^{2x-2}=1000^{\frac{x+1}{9}}$ је

   a) $x=-1$ b) $x=1/5$ c) $x=5$

___

Послије очигледних трансформација добијамо:

$$100\cdot 10^{2x-2}=1000^{\frac{x+1}{9}} \Leftrightarrow 10^2\cdot 10^{2x-2}=10^{3\left(\frac{x+1}{9}\right)} \Leftrightarrow 10^{2x}=10^{\frac{x+1}{3}}$$

$$\frac{x+1}{3}=2x \Rightarrow x+1=6x \Rightarrow -5x=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$$

4. Наћи m за које је један корјен једначине $x^2-(1+2m)x+m^2+2=0$ два пута већи од другог. Рјешење:

   a) $m=4$ b) $m=15$ c) $m=22$

___

Користећи Вијетова правила по којима за квадратну једначину $ax^2+bx+c=0$ и њене коријене $x_1,\ x_2$ важе једнакости:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ \ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

долазимо до сљедећих једначина:

$$x_1+x_2=\frac{1+2m}{1};\ \ x_1\cdot x_2=\frac{m^2+2}{1}$$

Из услова задатка долазимо да је $x_2 = 2x_1$, што уврштавамо у преходне изразе и долазимо до:

$$3x_1=1+2m \Rightarrow x_1=\frac{1+2m}{3}$$

$$2x_1^2=m^2+2 \Rightarrow x_1^2=\frac{m^2+2}{2}$$

Након што замјенимо x_1 из друге једначине са изразом за x_1 из прве једначине имамо једнакост:

$$\left(\frac{1+2m}{3}\right)^2=\frac{m^2+2}{2}$$
$$-m^2+8m-16=0$$

Задатак се свео на квадратну једначину $-m^2+8m-16=0$, за коју важи да је $D=0$, па су њена рјешења реална и једнака: $m_{1,2}=\frac{-b}{2a}=4$.

Дакле, за m = 4 једно рјешење је два пута веће од другог.

5. Рјешење једначине $2\cos^2 x-7\cos x+3=0$ је

a) $x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{3}+2k$ b) $x_1=\frac{\pi}{3}, x_2=2k\pi$ c) $x=0$

Тригонометријску једначину смо помоћу смјене cosx=t, $|t|\leq 1$ свели на квадратну једначину.

$$2\cos^2 x-7\cos x+3=0$$
$$\cos x=t$$
$$2t^2-7t+3=0$$
$$D=25\Rightarrow t_1=\frac{7+1}{4}=3,\ t_2=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\cos x=3 \text{ нема рјешења } -1\leq \cos x\leq 1$$
$$\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

Прво рјешење смо одбцили због ограничености функције y=cosx. Како је функција y=cosx првом и четвртом квадранту позитивна имали смо два рјешења једначине $cosx=\frac{1}{2}$.