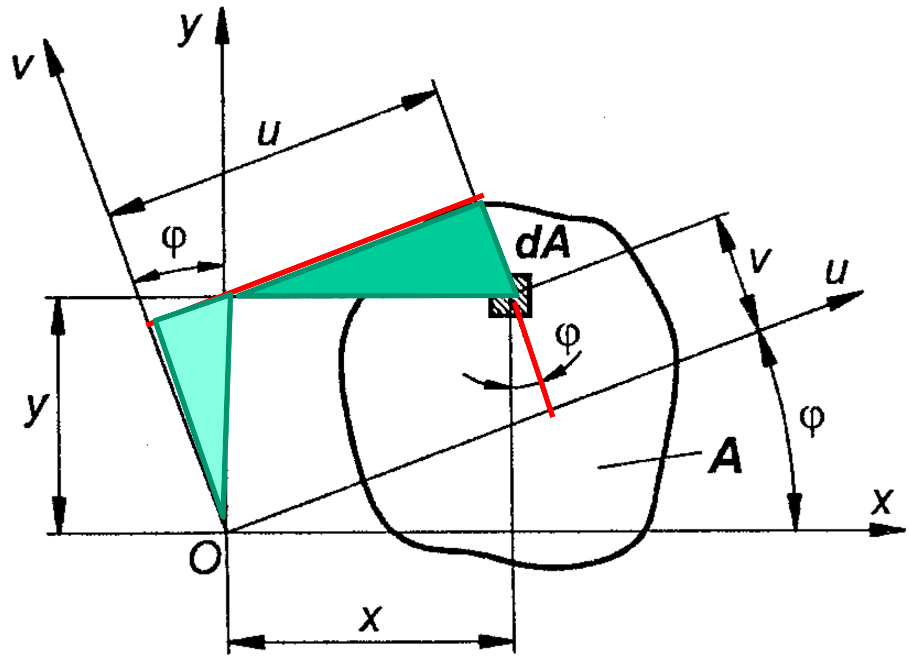
PROMENA MOMENATA INERCIJE
PRI ROTACIJI KOORDINATNOG SISTEMA



$I_x\ I_y$ i I_{xy} – A, xOy

$I_u\ I_v$ i I_{uv} – φ - uOv ?

$$u = x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi$$

$$v = -x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi$$

Po definiciji su:

$$I_u = \int_A v^2 dA\,,$$

$$I_v = \int_A u^2 dA\,,$$

$$I_{uv} = \int_A u \cdot v \cdot dA\,,$$

Tako je:

$$I_u = \int_A (-x sin\varphi + y cos\varphi)^2 dA$$

$$I_v = \int_A (x cos\varphi + y sin\varphi)^2 dA$$

$$I_u = \int_A (-x sin\varphi + y cos\varphi)(x cos\varphi + y sin\varphi)\, dA'$$

Kvadriranjem (množenjem) izraza u zagradi i zamjenom vrojednosti za Ix, Iy i Ixy:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA\,, \qquad I_y = \int_A x^2 \cdot dA \quad I_{xy} = \int_A xy \cdot dA$$

dobijaju se izrazi:

$$I_u = I_x \cdot cos^2\varphi + I_y \cdot sin^2\varphi - 2 \cdot I_{xy} \cdot sin\varphi \cdot cos\varphi\,,$$

$$I_v = I_x \cdot sin^2\varphi + I_y \cdot cos^2\varphi + 2 \cdot I_{xy} \cdot sin\varphi \cdot cos\varphi\,,$$

$$I_{uv} = \left(I_x - I_y\right) \cdot sin\varphi \cdot cos\varphi + I_{xy} \cdot \left(cos^2\varphi - sin^2\varphi\right).$$

Zamjenm vrijednosti za:

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2},$$

i sredjivanjem, dobijaju se izrazi za aksijalne i centrifugalne momente inercije preseka, za ose zarotiranog koordinatnog sistema:

$$I_u = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\varphi - I_{xy}\cdot \sin 2\varphi,$$

$$I_v = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\varphi + I_{xy}\cdot \sin 2\varphi,$$ ili kraće:

$$I_{u,v} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\varphi \mp I_{xy}\cdot \sin 2\varphi,$$ odnosno:

$$I_{uv} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\sin 2\varphi + I_{xy}\cdot \cos 2\varphi,$$

Polarni moment:

$$I_0 = I_u + I_v = I_x + I_y ,$$ - I invarijanta inercije.

Vrijednosti momenata inercije za različite vrijednosti ugla φ

φ	0	90	180	270	360
Iu	Ix	Iy	Ix	Iy	Ix
Iv	Iy	Ix	Iy	Ix	Iy
Iuv	Ixy	-Ixy	Ixy	-Ixy	Ixy
Io	Io = Ix + Iy = const				

Dovoljno je poznavati momente inercije za dvije međusobno upravne ose da se odrede momenti inercije za bilo koje dve međusobno upravne ose koje prolaze kroz isti koordinatni početak!

GLAVNI TEŽIŠNI MOMENTI INERCIJE

Iz izraza za I_u I_v *i* I_{uv}

$$I_{u,v} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\varphi \mp I_{xy} \cdot \sin 2\varphi ,$$

Vidi se da se momenti inercije I_u I_v *i* I_{uv} mijenjaju u zavisnosti od ugla φ.

Njihove ekstremne vrijednosti mogu se naći iz uslova:

$$\frac{dI_u}{d\varphi} = 0, \qquad \frac{dI_v}{d\varphi} = 0 ,$$ odnosno:

$$\frac{dI_u}{d\varphi} = -\frac{dI_v}{d\varphi} = -\left(I_x - I_y\right) \cdot \sin 2\varphi - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos 2\varphi = 0 .$$

Rješenjem jednačine

$$-(I_x - I_y)\cdot sin 2\varphi - 2\cdot I_{xy}\cdot cos 2\varphi = 0 \;/\; :\cos 2\varphi$$

dobija se vrijednost ugla φ pri kome I_u I_v imaju maksimalnu vrijednost. Ako tu vrijednost označimo sa α biće:

$$tg\, 2\alpha = -\frac{2\cdot I_{xy}}{I_x - I_y}.$$

Kako je:

$$tg(2\alpha + \pi) = tg\, 2\alpha, \text{ односно,}$$

$$tg\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] = tg\, 2\alpha,$$

Ekstremne vrednosti momenata inercije dobijaju se za koordinatne ose koje su zarotirane za vrednost ugla *a* u odnosu na početni koordinatni sistem *xOy*.

Iz drugog izvoda funkcija:

$$I_{u,v} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) cos\, 2\varphi \mp I_{xy} \cdot sin\, 2\varphi\,, \qquad tg\, 2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\,.$$

$$\frac{dI_u}{d\varphi} = -\frac{dI_v}{d\varphi} = -\left(I_x - I_y\right) \cdot sin\, 2\varphi - 2 \cdot I_{xy} \cdot cos\, 2\varphi = 0\,.$$

$$\frac{d^2 I_u}{d\varphi^2} = -\frac{d^2 I_v}{d\varphi^2} = -2\left(I_x - I_y\right) \cdot cos\, 2\varphi + 4 \cdot I_{xy} \cdot sin\, 2\varphi =$$

$$= -2 \cdot \cos 2\varphi \left[\left(I_x - I_y\right) - 2 \cdot I_{xy} \cdot \frac{-2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}\right] =$$

$$= -2 \cdot \left[\left(I_x - I_y\right)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2\right] \cdot \frac{\cos 2\varphi}{I_x - I_y}\,.$$

Za $I_x > I_y$:

$$\frac{d^2 I_u}{d\varphi^2} < 0 \quad I_u\,(\varphi=\alpha) = I_{max}$$

$$\frac{d^2 I_u}{d\varphi^2} = -2 \cdot \left[(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2 \right] \cdot \frac{\cos 2\alpha}{I_x - I_y}.$$

$$\frac{d^2 I_v}{d\varphi^2} > 0 \quad I_v\,(\varphi=\alpha) = I_{min}$$

Za $I_x > I_y$ rotacijom koordinatnog sistema za ugao φ:

- osa x postaje osa za koju moment inercije ima maksimalnu vrijednost,
- osa y postaje osa za koju moment inercije ima minimalnu vrijednost.

Za $I_x < I_y$:

$$\frac{d^2 I_u}{d\varphi^2} > 0 \Rightarrow I_u(\varphi = \alpha) = I_{min},$$

$$\frac{d^2 I_v}{d\varphi^2} < 0 \Rightarrow I_v(\varphi = \alpha) = I_{max},$$

Za $I_x < I_y$:

- osa y postaje osa za koju moment inercije ima maksimalnu vrijednost, a
- osa x postaje osa za koju moment inercije ima minimalnu vrijednost

Ekstreme vrijednosti momenata inercije Iu, Iv, Iuv, odnosno I1, I2, I12 dobijaju se ako se u obrasce:

$$I_{u,v} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\varphi \mp I_{xy} \cdot \sin 2\varphi \,,$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\sin 2\varphi + I_{xy} \cdot \cos 2\varphi \,,$$

zamijene vrijednosti za

$$\sin\beta = \frac{tg\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}}, \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}$$, pri čemu je:

$$tg\,2\beta = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}.$$

Nakon sređivanja dobija se:

$$I_{u,v} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\frac{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2}{\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2}},$$

$$I_{u,v} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2},$$ odnosno:

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2},$$

$$I_u(\varphi)\Big|_{\varphi = \alpha} = I_{max} = I_1,$$

$$I_v(\varphi)\Big|_{\varphi = \alpha + \pi/2} = I_{min} = I_2$$

$$I_{uv}(\varphi)\Big|_{\varphi = \alpha} = I_{12} = 0.$$

Za $\varphi = \alpha$, centrifugalni moment je jednak nuli.

Ose 1 i 2 - **glavne ose inercije,** a odgovarajući momenti inercije - **glavnim momentima inercije.**

Ukoliko je koordinatni početak u težištu (centru) poprečnog preseka:

Ose 1 i 2 - **glavne težišne (centralne) ose inercije,** a momenti inercije I_1 i I_2 - **glavni težišni (centralni) momenti inercije.**

Glavni težišni koordinatni sistem - težišni koordinatni sistem za čiji je par osa centrifugalni moment inercije jednak nuli, a aksijalni momenti inercije imaju ekstremne vrednosti.

Ako površina ima bar jednu osu simetrije centrifugalni moment inercije za par osa, od kojih je jedna osa simetrije, jednak je nuli.

Osa simetrije je ujedno i glavna težišna osa presjeka.

Problem se može posmatrati i obrnuto:

Ako se pođe od glavnih osa 1 i 2 i koordinatni sistem zaokrene za neki ugao ψ, iz jednačine

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2} \,,$$

može se naći vrijednosti momenata inercije za neki par osa *m*, *n* koje su zaokrenute za neki ugao ψ u odnosu na pravce glavnih osa:

$$I_{m,n} = \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right) \pm \frac{1}{2}\left(I_1 - I_2\right) \cdot \cos 2\psi \,,$$

$$I_{mn} = \frac{1}{2}\left(I_1 - I_2\right) \cdot \sin 2\psi \,.$$

Poluprečnici inercije

Pod poluprečnikom inercije za neku osu podrazumeva se veličina:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}, \ [l], > 0$$

Za ose *x* i *y*:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}},$$

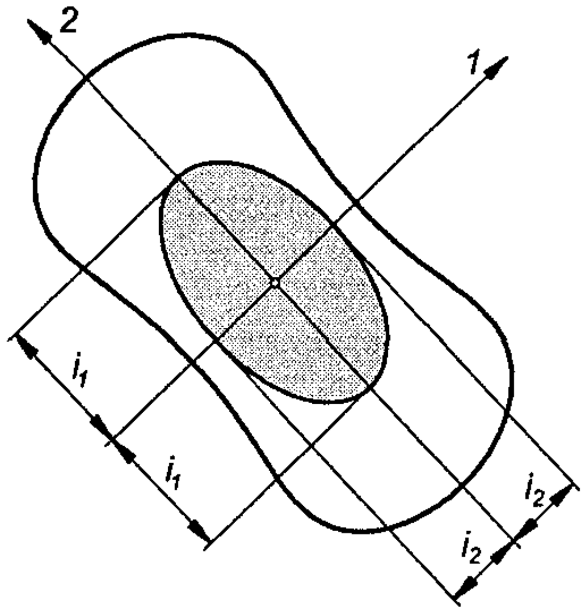
Za glavne težišne ose:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = i_{max}, \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = i_{min}.$$

Elipsa inercije

Elipsa određena jednačinom: $\frac{u^2}{i_2^2} + \frac{v^2}{i_1^2} = 1$

i konstruisana prema slici, naziva se elipsa inercije.



Elipsa inercije prati oblik konture poprečnog presjeka, odnosno prostire se u pravcu prostiranja površine poprečnog preseka.

Otporni moment

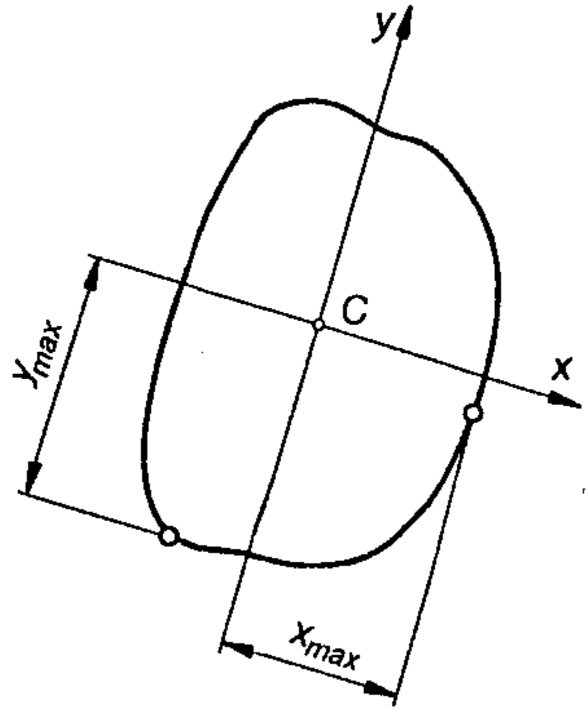
Otporni moment (W) - geometrijska karakteristika poprečnog preseka nekog konstruktivnog elementa i predstavlja količnik:

$$W = \frac{I}{l_{max}}$$

Za ose x i y:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{max}}$$

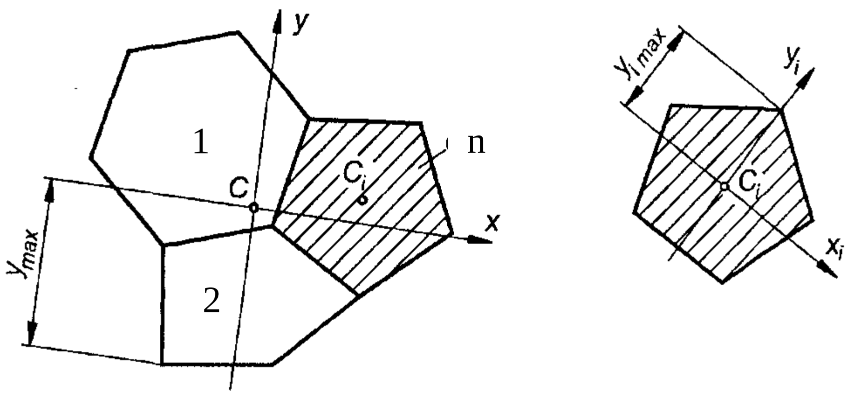


Polarni otporni moment

$$W_0 = \frac{I_0}{\rho_{max}}$$

Za kružni poprečni presjek:

$$W_0 = \frac{2I_0}{D}\text{, jer je } \rho_{max} = R = \frac{D}{2}$$



$$I_x = I_x(1) + I_x(2) + \ldots + I_x(n) = \sum I_x(i),$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{I_x(1) + I_x(2) + \ldots + I_x(n)}{y_{max}} \neq W_x(1) + W_x(2) + \ldots + W_x(n),$$

$$W_x \neq \sum W_x(i).$$