VJEROVATNOĆA I STATISTIKA
materijal sa predavanja broj 1

Autori:
Dušan Jokanović, dusan.jokanovic@fpm.ues.rs.ba
Marina Milićević, marina.milicevic@fpm.ues.rs.ba

1.1 Osnovni pojmovi teorije vjerovatnoće

Teorija vjerovatnoće je stara oblast matematike koja se počela razvijati u 17. vijeku. Knjiga *"O igri kockom"* italijanskog matematičara Giorilamo Cardana iz 1663. godine predstavlja prvi pisani materijal iz teorije vjerovatnoće.

Osnovni pojam u teoriji vjerovatnoće je eksperiment (opit, pojava). Za eksperiment podrazumijevamo da se može ponavljati proizvoljan broj puta i da je unaprijed definisan skup svih mogućih ishoda, i konačno ishod pojedinačnog eksperimenta nije unaprijed poznat. Ovakvi ishodi nazivaju je slučajni (nedeterministički). Za razliku od njih Njutnovi zakoni mehanike, odnosno opšte gravitacije dešavaju se po determinističkim zakonima. Na prirodan način se nameće ideja o brojnom ocjenjivanju mogućnosti realizacije slučajnih pojava. Upravo ovakav način izračunavanja i proučavanja slučajnih pojava je predmet matematičke discipline koja se naziva *teorija vjerovatnoće*.

Skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta nazivamo *prostor ishoda* i označavamo sa Ω, a njegove elemente (elementarne događaje) sa ω. Podskupove skupa Ω nazivamo *događaji*. Kažemo da se događaj $A \subseteq \Omega$ realizuje ako se ostvari neki elementarni događaj iz A.

U daljem navodimo primjere konstrukcije prostora vjerovatnoće.

Primjer 1. Pretpostavimo da ponavljamo eksperiment bacanja homogenog novčića. Kao ishod svakog bacanja može se pojaviti grb **G** ili pismo **P**. Dakle skup svih mogućih ishoda je $\Omega = \{G, P\}$. Pretpostavimo da eksperiment bacanja novčića ponavljamo veliki broj puta. Označimo sa S_n broj pojavljivanja grba u n ponavljanja eksperimenta. Brojna vrijednost $\frac{S_n}{n}$ naziva se *relativna frekvencija* (učestalost) pojavljivanja grba u seriji od n bacanja novčića. Ponavljamo li eksperiment realativno veliki broj puta primjetiti ćemo interesantnu i prirodnu pojavu, da je broj grbova i pisama približno jednak, odnosno da je broj $\frac{S_n}{n}$ približno jednak broju $\frac{1}{2}$. $\square$

Izlaganje nastavljamo sa primjerom bacanja kocke.

Primjer 2. Data je standardna kocka sa numerisanim stranama brojevima 1,2,3,4,5,6. Bacamo kocku i registrujemo broj koji se pojavio na gornjoj strani kocke. U ovom slučaju

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

U prethodna dva primjera ako ponavljamo eksperimente bacanja kocke ili novčića veliki broj puta, iskustveno gledano svi mogući ishodi se podjednako često realizuju. Ovu osobinu drugačije izražavamo: *ishodi su jednako vjerovatni*. Dakle u oba primjera razmatrani događaji imaju osobinu stabilnosti frekvencija pojavljivanja. Tako frekvencija pojavljivanja pisma "ne odstupa mnogo" od $\frac{1}{2}$, dok frekvencija pojavljivanja broja 2 "ne odstupa mnogo od" $\frac{1}{6}$. Upravo ova osobina stabilnosti frekvencija predstavlja osnov za razvoj teorije vjerovatnoće.

U teoriji vjerovatnoće svakom događaju A pridružujemo brojnu vrijednost $P(A)$, koju nazivamo vjerovatnoćom dogadjaja A koja je veoma "blizu" frekvencijama pojavljivanja u serijama ponavljanja eksperimenta. Primjetimo da se u svakom od navedena dva primjera vjerovatnoća događaja A zadaje se sa

$$P(A) = \frac{k}{n},$$

gdje je n ukupan broj svih mogućih ishoda eksperimenta, a broj k broj ishoda eksperimenta u kojima se realizuje događaj A.

Primjer 3. Bacaju se istovremeno novčić i homogena numerisana kocka sa numeracijom od 1 do 6. Odrediti prostor svih ishoda.

Imajući u vidu da se na gornjoj strani novčića može pojaviti grb ili pismo a na gornjoj strani kocke bilo koji broj od 1 do 6 jasno je da skup Ω možemo predstaviti kao skup uređenih parova na sljedeći način:

$$\Omega = \{(G, 1), (G, 2), (G, 3), (G, 4), (G, 5), (G, 6),$$
$$(P, 1), (P, 2), (P, 3), (P, 4), (P, 5), (P, 6)\}.$$

Primjer 4. U toku jednog, na slučajan način odabranog mjeseca u godini, svaki sat vremena se mjeri atmosferski pritisak. Opišimo bar jedan način zadavanja prostora ishoda.

Za skup Ω možemo uzeti skup svih funkcija neprekidnih, nenegativnih funkcija ograničenih odozgo sa konstantom koja predstavlja maksimalnu vrijednost atmosferskog pritiska. $\square$

Primjer 5. Strijelac gađa u kružnu metu poluprečnika 10 cm i pri tom mjerimo rastojanje pogotka od centra mete. Opisati prostor ishoda.

Kako je rastojanje od centra bilo koji broj od 0 do 10, a imajući u vidu da meta može biti promašena, prostor ishoda može biti predstavljen na sljedeći način

$$\Omega = \{x : 0 \leq x \leq 10\} \cup \{\square\},$$

gdje je sa $\square$ označen promašaj. $\square$

Primjer 6. Iz intervala $[a, b]$ slučajno se bira broj ω. Ishod eksperimenta je izabrani broj. Jasno je da je skup $\Omega = [a, b]$. $\square$

1.2 Algebra događaja

Sa pojmovima događaj i prostor ishoda Ω već smo se upoznali. Pomenuti pojmovi su u suštini skupovi, pa tako postoji određena analogija između algebre skupova i algebre događaja. Događaj (skup) $A \subseteq \Omega$ se realizuje akko se u eksperimentu dogodi neki od elementarnih ishoda iz A. Skup Ω je *siguran događaj* jer se u svakom eksperimentu realizuje elementarni događaj iz Ω. Za događaj $A = \emptyset$ kažemo da je *nemoguć* - on se nikada neće ostvariti.

Događaj $A \cup B$ nazivamo unija događaja A i B i on se realizuje akko se realizuje bar jedan od događaja A ili B:

$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}.$$

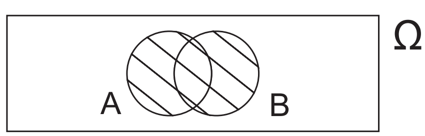

Figure 1.1: Unija dogadjaja A i B

Događaj $A \cap B$ nazivamo presjek događaja A i B i on se relalizuje akko se realizuju oba događaja A i B:

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}.$$

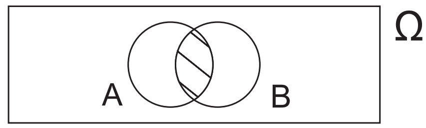

Figure 1.2: Presjek dogadjaja A i B

U Teoriji vjerovatnoće uobičajena oznaka za presjek događaja A i B je AB. Analogno se definiše unija (presjek) konačno mnogo događaja $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$, odnosno $\bigcup_{i\in I} A_i$ $(\bigcap_{i\in I} A_i)$, I-najviše prebrojiv skup.

Događaj $A \setminus B$ nazivamo razlika događaja A i B i on se realizuje akko se A realizuje i B ne realizuje:

$$A \setminus B = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}.$$

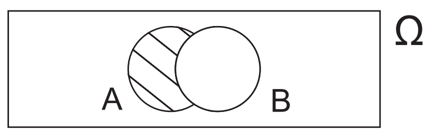

Figure 1.3: Razlika dogadjaja A i B

Događaj $A^C = \Omega \setminus A$ nazivamo *komplement događaja* A (ili suprotan događaj događaju A) i on se realizuje akko se događaj A ne realizuje:

$$A^C = \{\omega : \omega \notin A\}.$$

Jasno $\Omega^C = \emptyset$. Primjećujemo da važi $A \setminus B = AB^C$.

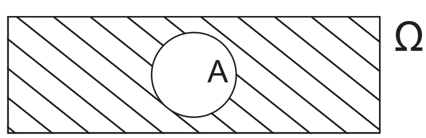

Figure 1.4: Komplement dogadjaja A

U nastavku uvodimo pojam koji ima veoma bitnu ulogu u teoriji vjerovatnoće.

Događaji A i B su *isključivi (disjunktni)* ako je $AB = \emptyset$. U tom slučaju, događaji A i B se ne mogu istovremeno dogoditi.

Literatura

[1] Dušan Jokanović, Marina Milićević, *Vjerovtnoća i statistika*, Fakultet za proizvodnju i menažment Trebinje, ISBN: 978-99976-778-1-5, 2020.